พลศาสตร์โครงสร้างพื้นฐานสำหรับแผ่นดินไหว

นคร ภู่วโรดม

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

โครงการพัฒนาหลักสูตรการเรียนรู้เรื่องการออกแบบอาคารต้านทานแผ่นดินไหว

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยและนวัตกรรมจากสำนักงานการวิจัยแห่งชาติ (วช.) พ.ศ. 2568

เนื้อหา

- พลศาสตร์โครงสร้างเบื้องต้น
  - ระบบโครงสร้างแบบง่าย สมการของการเคลื่อนที่ การสั่นแบบอิสระ การสั่นเนื่องจากแรงภายนอก ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง
    - เพื่อให้เข้าใจถึงกลไกการตอบสนองต่อแรงพลศาสตร์
- ลักษณะการตอบสนองของโครงสร้างเนื่องจากแผ่นดินไหว
  - สเปกตรัมผลตอบสนอง พฤติกรรมการตอบสนองแบบอินอีลาสติก
    - เพื่อให้เข้าใจผลของแผ่นดินไหวที่ทำให้เกิดแรงต่อโครงสร้างต่าง ๆ (Elastic and Inelastic Response Spectrum)
- พลศาสตร์โครงสร้างในมาตรฐานการออกแบบ
  - วิธีแรงสถิตเทียบเท่า *วิธีสเปกตรัมการตอบสนองแบบโหมด วิธีวิเคราะห์การตอบสนองแบบแบบประวัติเวลาแบบเชิงเส้น*
    - เพื่อให้เข้าใจแนวปฏิบัติของมาตรฐานการออกแบบ

พลศาสตร์โครงสร้าง (Structural Dynamics)

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างภายใต้แรงพลศาสตร์ (Dynamic force) และวิเคราะห์ผลการตอบสนอง (Response) สำหรับปัญหาแบบต่าง ๆ เพื่อที่จะสามารถตรวจสอบความเหมาะสมของโครงสร้าง ทั้งทางด้านความปลอดภัย (Safety) และความเหมาะสมที่จะใช้งาน (Serviceability)

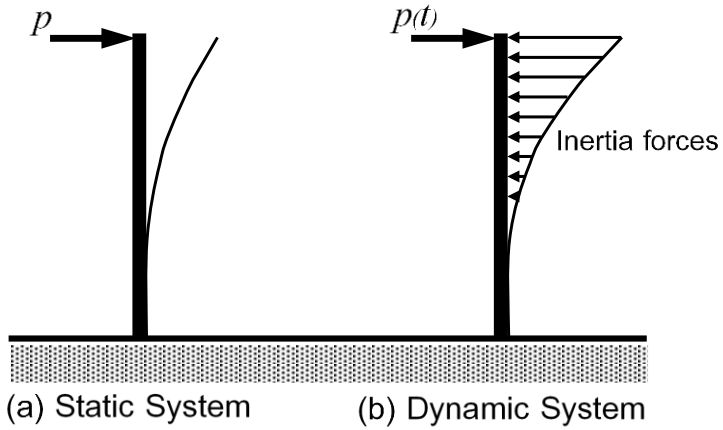
- Structural Engineering
- Mathematics

ลักษณะสำคัญของปัญหาเชิงพลศาสตร์

ปัญหาเชิงพลศาสตร์เป็นลักษณะเปลี่ยนแปลงตามเวลา คำตอบไม่ได้เป็นค่าเดียว

$\Rightarrow$ คำตอบจึงอยู่ในรูปลำดับตามเวลาในช่วงที่สนใจ หรือ ประวัติเวลา (response time history)

การเปรียบเทียบระหว่าง
ปัญหา static & dynamic



ปัญหาแผ่นดินไหว
พิจารณาค่าสูงสุด
สำหรับการออกแบบ

Static: แรงภายในสมดุลกับแรงภายนอก P

Dynamic: การเคลื่อนที่เปลี่ยนตามเวลา และมีความเร่งเกิดขึ้นที่จุดต่าง ๆ ในระบบได้

ความเร่ง และมวลของระบบ ทำให้เกิดเป็นแรงเฉื่อย (Inertia force)

ดังนั้น สมดุลของแรงจึงมีผลจากแรงเฉื่อย (และแรงอื่น ๆ ที่เป็นผลจากการเคลื่อนที่) รวมอยู่

ลักษณะสำคัญของปัญหาเชิงพลศาสตร์

ลักษณะที่สำคัญของปัญหาเชิงพลศาสตร์ คือ การมีอยู่ของ Inertia Force

การสั่นไหวช้า ๆ ⇒ Static Problem

การสั่นไหวอย่างมีนัยสำคัญ ⇒ Dynamic Problem

ตำแหน่งที่มีมวล ⇒ เกิด Inertia Force

ตำแหน่งที่ไม่คิดมวล ⇒ ไม่คิด Inertia Force

มวล + การสั่นไหว ⇒ Concept of Degree of Freedom

ผลตอบสนองที่เกิดขึ้นระหว่างการเคลื่อนที่

- การกระจัด (Displacement) $u(t)$

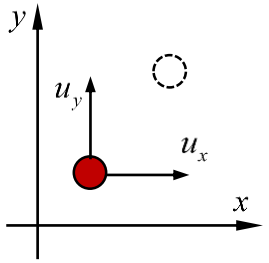
- ความเร็ว (Velocity) $v(t) = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt}$ ใช้สัญลักษณ์ $\dot{u} = \frac{du}{dt}$

- ความเร่ง (Acceleration) $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d^2u}{dt^2}$ ใช้สัญลักษณ์ $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$

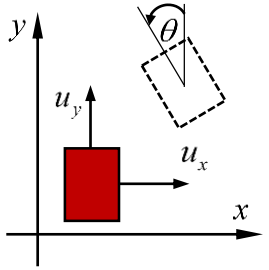
ระบบโครงสร้างแบบง่าย

ระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) DOF

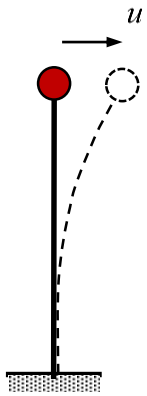
- *จำนวนของพิกัดอิสระที่สามารถ ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ได้อย่างสมบูรณ์*



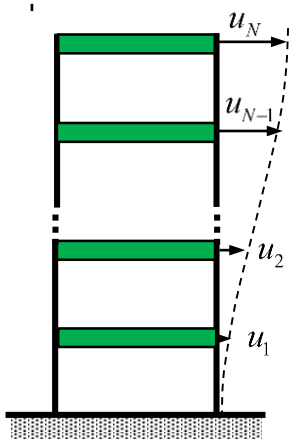
(1) 2 DOF



(2) 3 DOF



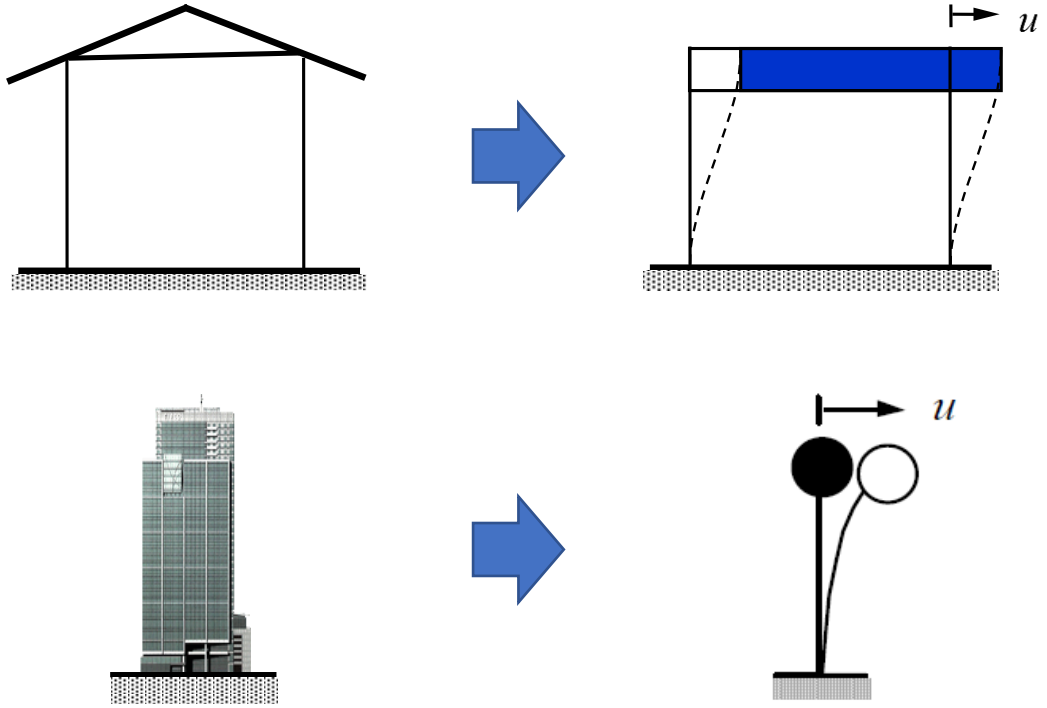
(3) 1 DOF, SDOF



(4) N DOF

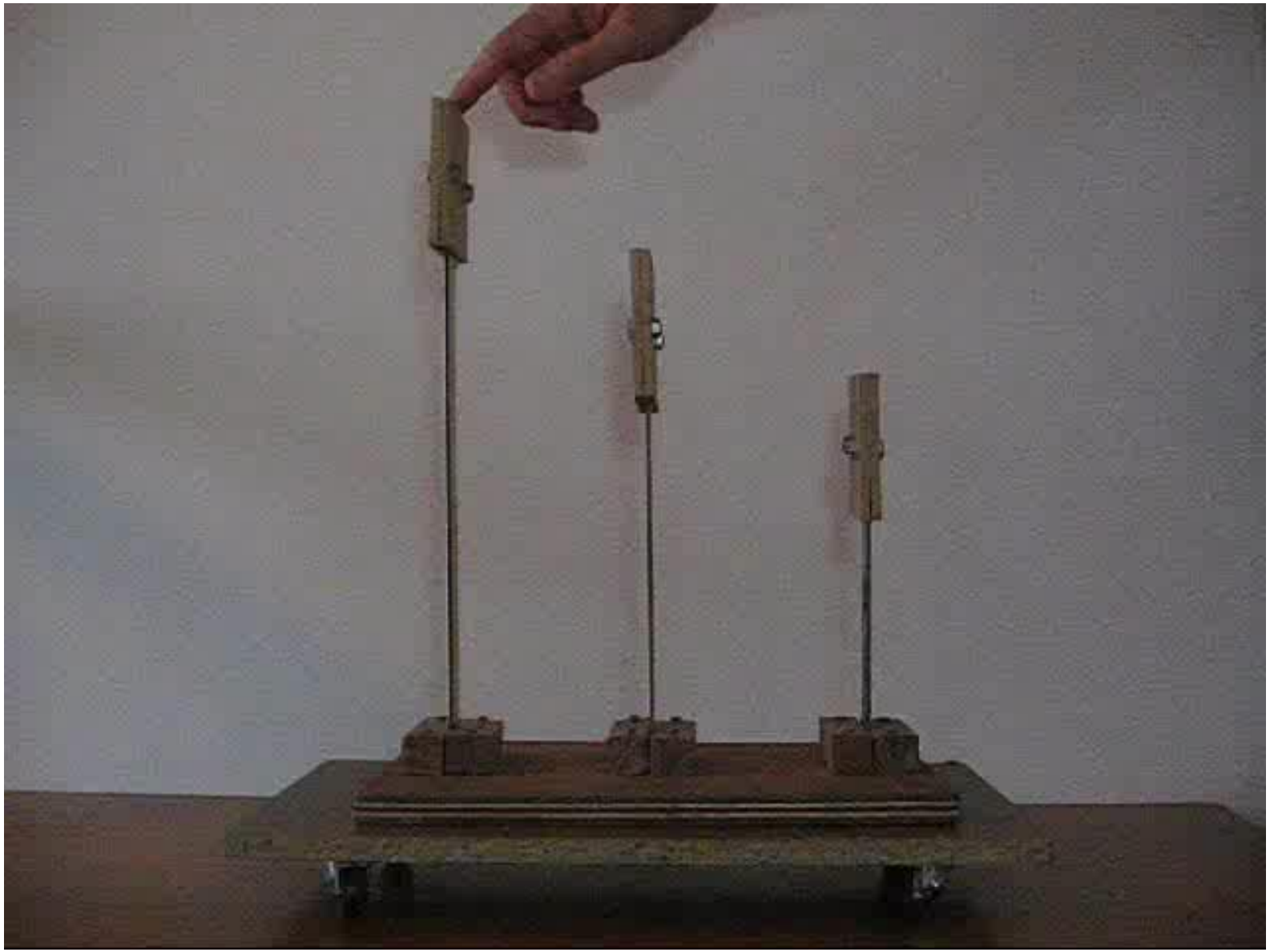
ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง

Single Degree-of-Freedom System (SDOF)

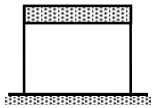


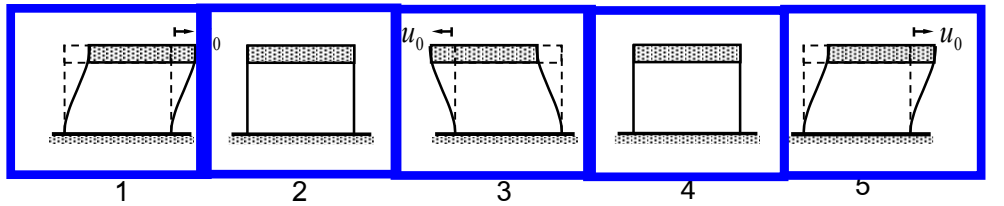
เพื่อการศึกษาพื้นฐานของพลศาสตร์โครงสร้าง และสามารถประยุกต์สำหรับปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นได้ต่อไป

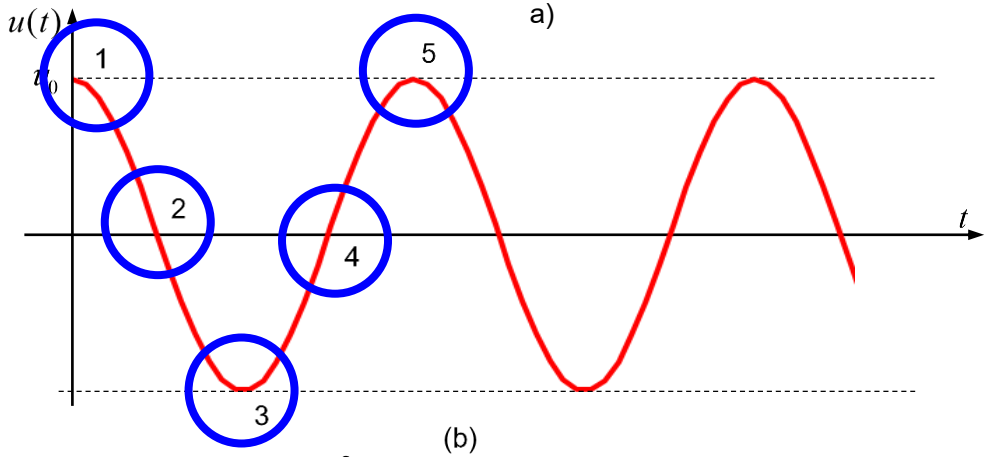
แบบจำลองอาคารเมื่อเกิดการสั่นไหว



องค์ประกอบของระบบพลศาสตร์







แรงที่เกิดขึ้นระหว่างการเคลื่อนที่

- **แรงเฉื่อย (Inertia force)**
- **แรงสติฟเนส (Stiffness force)**
- **แรงหน่วง (Damping force)**

ก. องค์ประกอบพื้นฐานของแรงเฉื่อย

มวล (Mass) m

กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

แรงเฉื่อย (Inertia force) $f_I = m\dfrac{d^2u}{dt^2}$

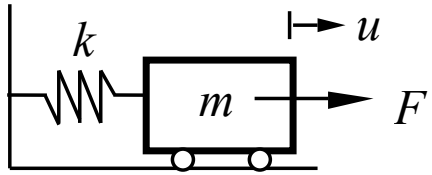
ใช้สัญลักษณ์ $\ddot{u} = \dfrac{d^2u}{dt^2}$ ดังนั้น

$$f_I = m\ddot{u}$$

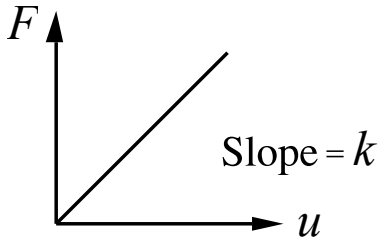
แรง = มวล x ความเร่ง

ข. องค์ประกอบพื้นฐานของแรงสติฟเนส

สติฟเนส (Stiffness) k



(a)



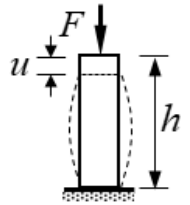
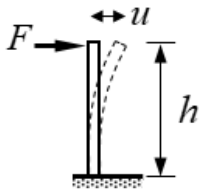
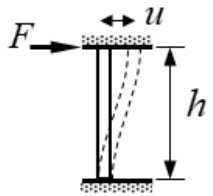
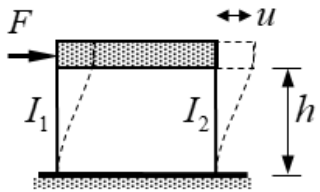
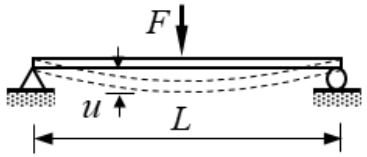
(b)

กฎของฮุค

แรงสติฟเนส (Stiffness force) f_S

$$f_S = ku$$

แรง = ค่าสติฟเนส X การกระจัด

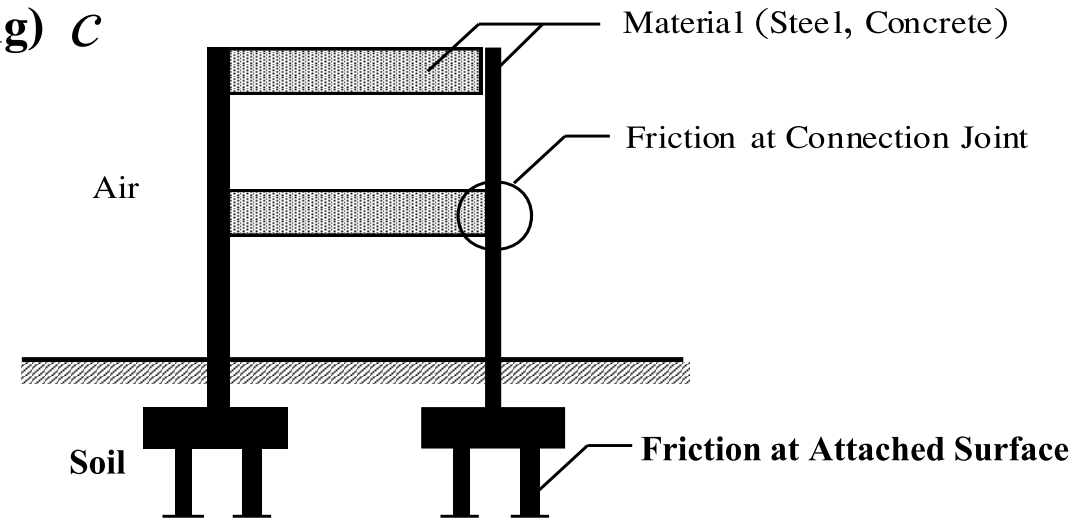
ลักษณะโครงสร้าง	ค่าการเคลื่อนตัวสูงสุด u	ค่าสติฟเนส k
	$\frac{Fh}{AE}$	$\frac{AE}{h}$
	$\frac{Fh^3}{3EI}$	$\frac{3EI}{h^3}$
	$\frac{Fh^3}{12EI}$	$\frac{12EI}{h^3}$
	$\frac{Fh^3}{12E(I_1+I_2)}$	$\frac{12E(I_1+I_2)}{h^3}$
	$\frac{Fh^3}{48EI}$	$\frac{48EI}{L^3}$

สติฟเนส = แรงที่ทำให้เกิดการเสียรูปหนึ่งหน่วย

ค. องค์ประกอบพื้นฐานของแรงหน่วง

ความหน่วง (Damping) c

ตัวอย่างแหล่งที่มาของความหน่วงในโครงสร้าง



จากการทดลองพบว่า

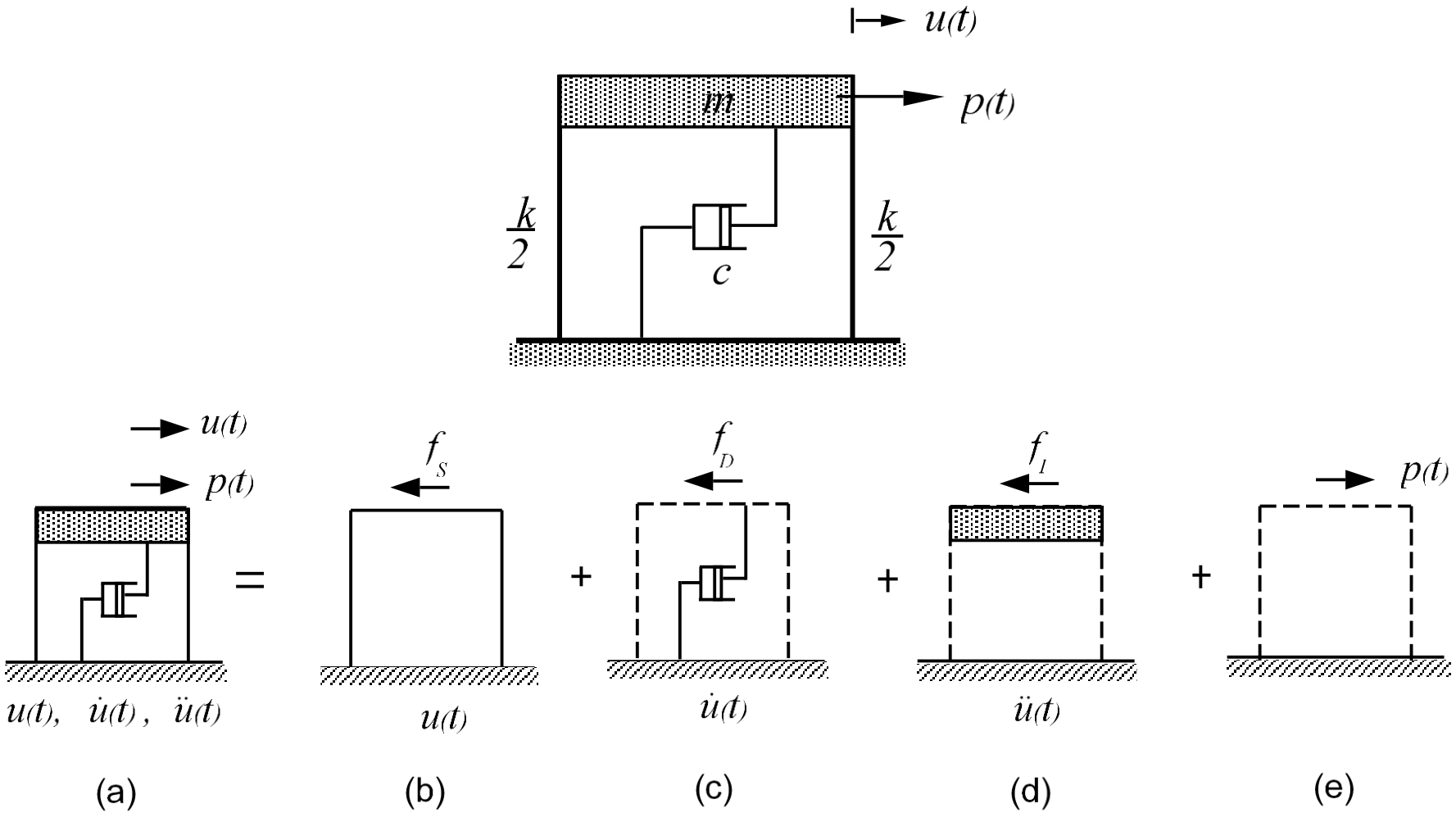
แรงหน่วง (Damping force) $f_D = c\dfrac{du}{dt}$

ใช้สัญลักษณ์ $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$ **ดังนั้น**

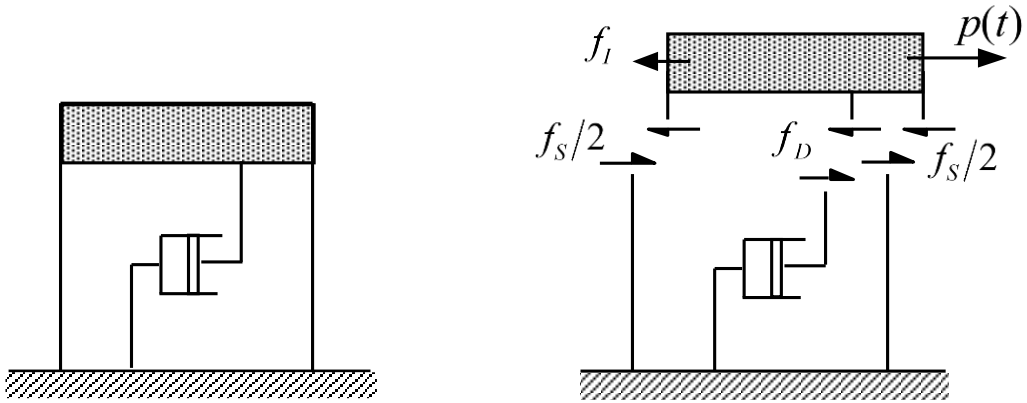
$$f_D = c\dot{u}$$

แรง = ค่าความหน่วง x ความเร็ว

แบบจำลองสำหรับระบบ SDOF



สมการของการเคลื่อนที่



จาก Free Body Diagram ของมวล *m*

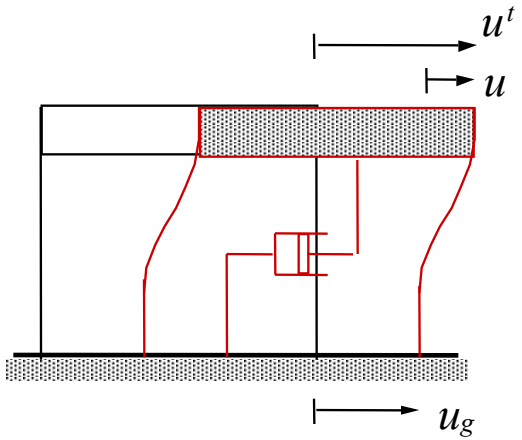
ดังนั้น

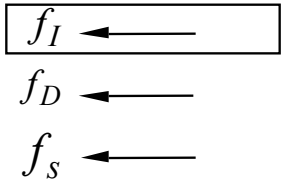
$$f_I + f_D + f_S = p(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Dynamic Equilibrium ⇒ ***Equation of Motion***

สมการของการเคลื่อนที่สำหรับโครงสร้างภายใต้แผ่นดินไหว





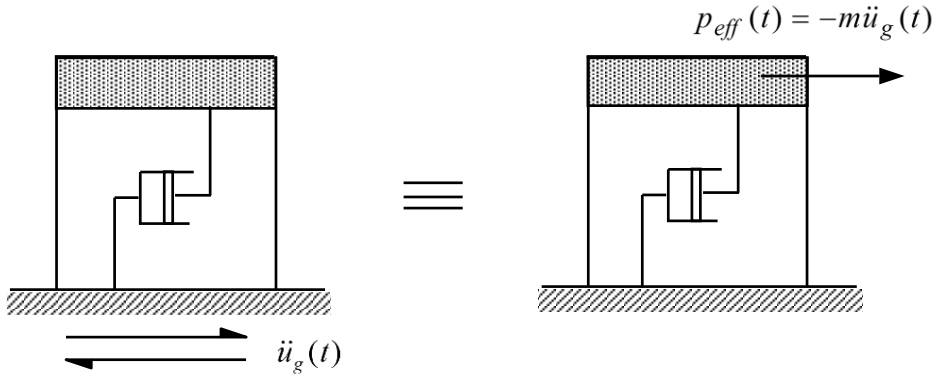
- การกระจัดรวมของมวล m $u^t(t) = u(t) + u_g(t)$
  - สมดุล $f_I + f_D + f_S = 0$
  - แรงเฉื่อย $f_I = m\ddot{u}^t$
  - สมการของการเคลื่อนที่ $m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g(t)$$

แรงแผ่นดินไหวประสิทธิผล

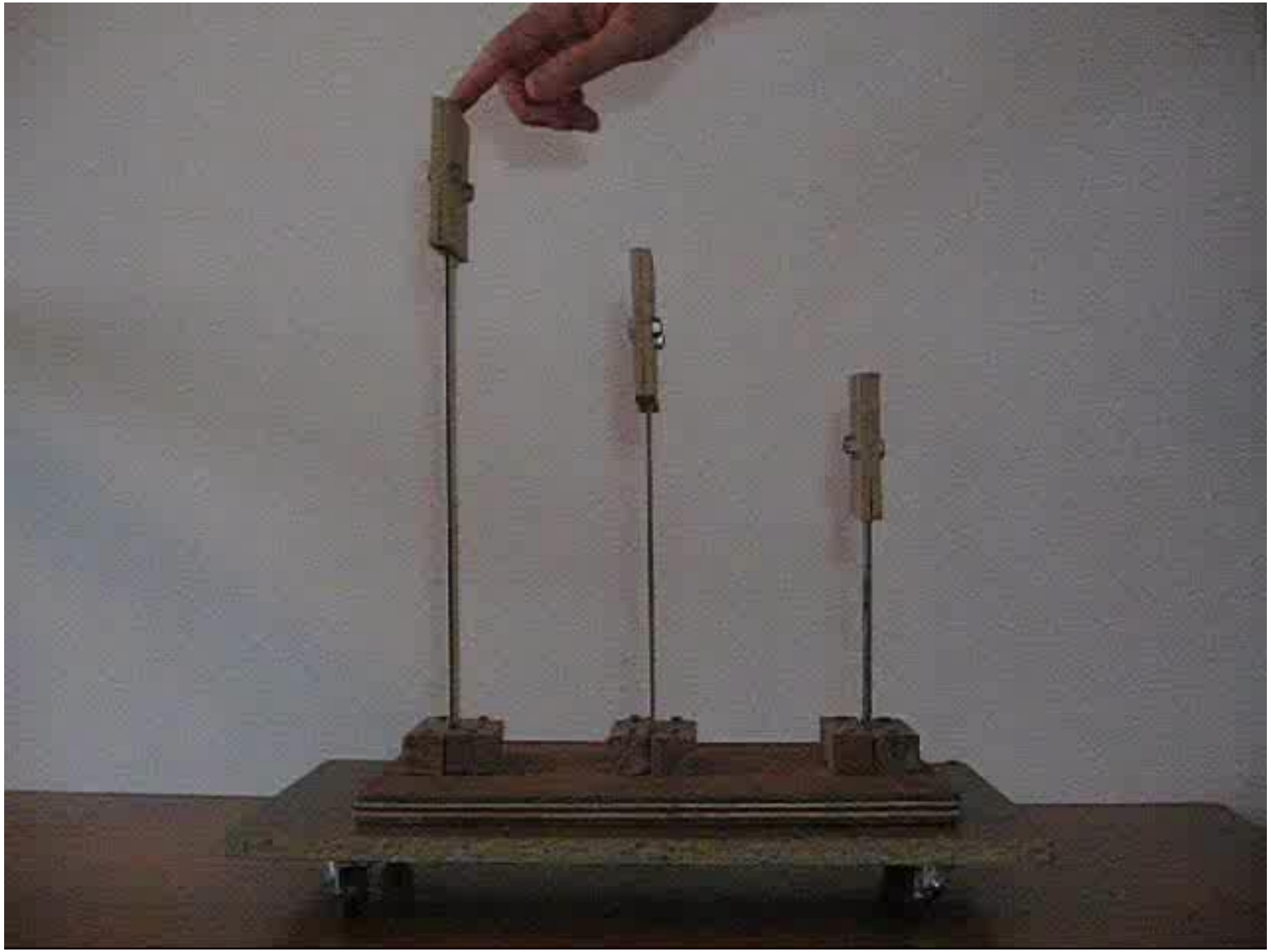


Effective Earthquake Force $p_{eff}(t)$

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

แรงจากแผ่นดินไหว มีค่าตามมวล (หรือน้ำหนักของโครงสร้าง) และความเร่งของพื้น

การตอบสนองของแบบจำลองอาคารต่อแผ่นดินไหว



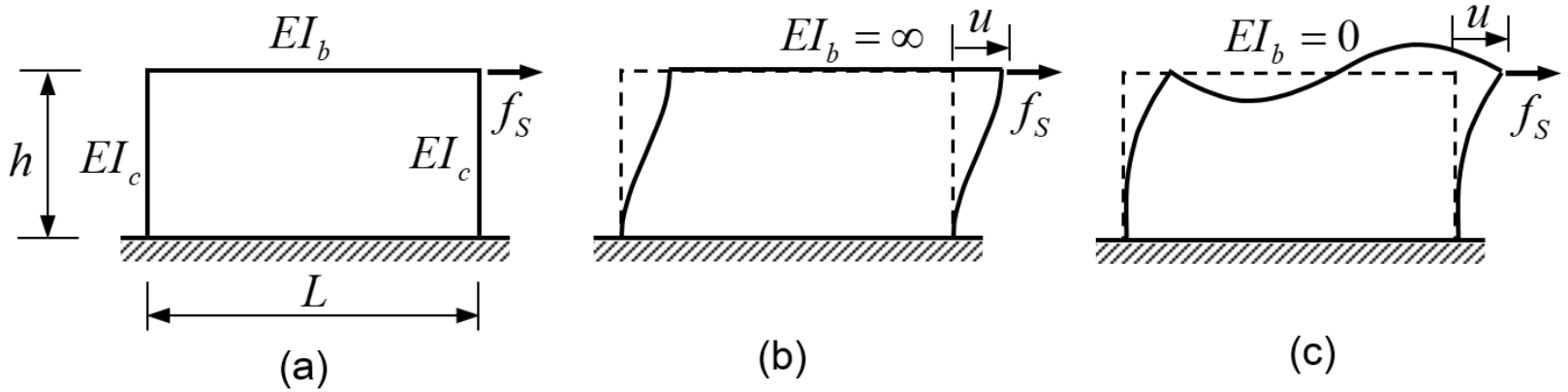
ตัวอย่าง

จงหาค่าสติฟเนสต้านทานแรงทางด้านข้างของโครงข้อแข็งแบบ Portal ดังรูป (a)

โดยเสาทั้งสองมีปลายล่างยึดแน่นกับฐาน โดยให้พิจารณา 2 เงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) คานมีสติฟเนสต้านการโก่งตัวเป็นอนันต์ $EI_b = \infty$ ดังรูป (b)

2) คานมีสติฟเนสต้านการโก่งตัวเป็นศูนย์ $EI_b = 0$ ดังรูป (c)



ตัวอย่าง

<u>วิธีทำ</u>

1) เนื่องจากคานที่ยึดปลายเสาด้านบนไม่มีการดัด เสาจึงเสมือนกับถูกยึดรั้งแบบมีค่าสติฟเนสของแต่ละต้นเท่ากับ $12EI_c/h^3$ ดังนั้นสติฟเนสรวมของระบบมีค่าเท่ากับ

$$k = 2 \times 12EI_c/h^3 = 24EI_c/h^3$$

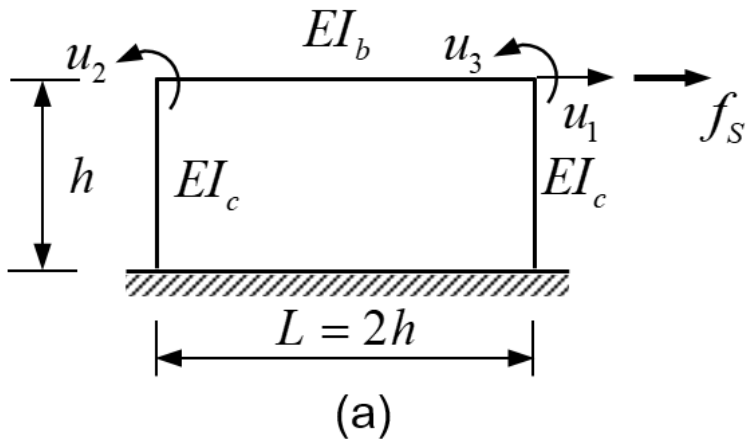
2) เนื่องจากคานที่ยึดปลายเสาด้านบนอ่อนมาก เสาจึงเสมือนเป็นเสาปลายยื่นที่หมุนได้อิสระมีค่าสติฟเนสของแต่ละต้นเท่ากับ $3EI_c/h^3$ ดังนั้นสติฟเนสรวมของระบบมีค่าเท่ากับ

$$k = 2 \times 3EI_c/h^3 = 6EI_c/h^3$$



ตัวอย่าง

จงหาค่าสติฟเนสต้านทานแรงทางด้านข้างของระบบ Portal เพื่อจำลองให้เป็นระบบ SDOF



(a)

3DOF

u_1 คือการเคลื่อนที่ในแนวราบของคาน

u_2 และ u_3 คือการหมุนของข้อต่อทั้งสอง

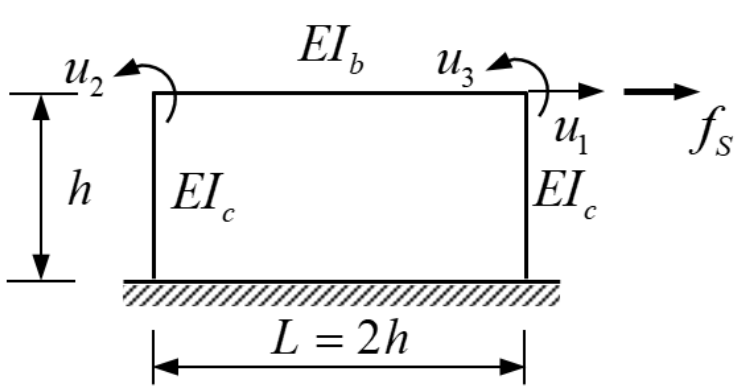
วิธีทำ

ระบบมี DOF เท่ากับ 3 แต่มวลของ DOF สำหรับการหมุนที่ข้อต่อมีผลน้อยมาก

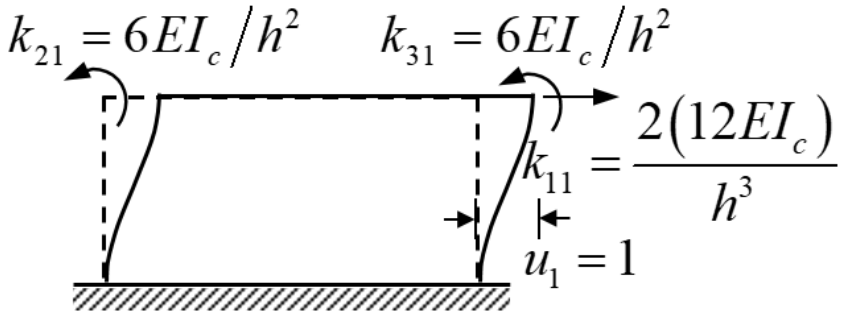
จึงจะสร้างแบบจำลองให้เป็นระบบ SDOF คือทำการรวมผลของ u_2 และ u_3

สำหรับสติฟเนสของ u_1 โดยหลักการควบรวมเชิงสถิต (Static condensation)

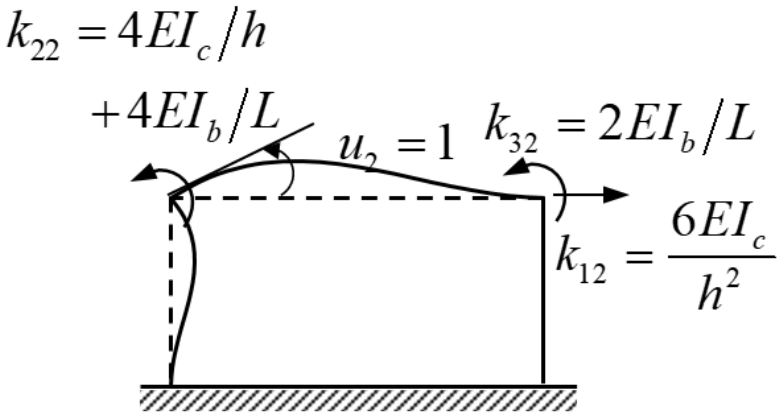
สติฟเนสของระบบ 3DOF สามารถหาได้จากรูป (b) (c) และ (d)



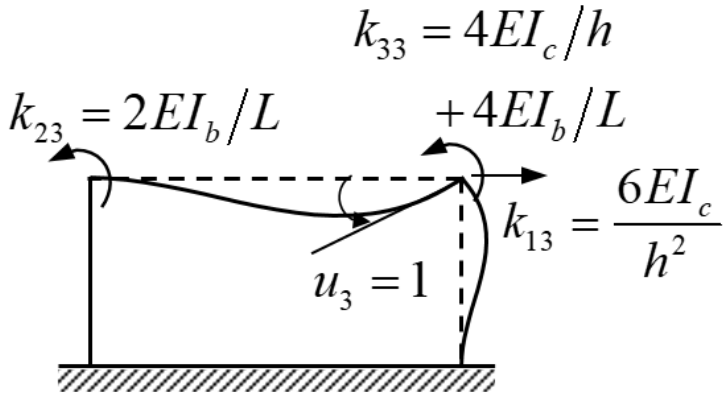
(a)



(b)



(c)



(d)

สำหรับ $L = 2h$ และ $I_b = I_c$ แสดงค่าในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{K} = \frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}$$

หากพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ของแรงจากสติฟเนส f_S

ต้องการในรูปแบบของ DOF u_1 เท่านั้น

$$f_S = k_e u_1$$



สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix}24 & 6h & 6h\\ 6h & 6h^2 & h^2\\ 6h & h^2 & 6h^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_S\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad \text{(ก)}$$

พิจารณาเฉพาะ 2 สมการของ u_2 และ u_3 จะได้

$$(6h)u_1+(6h^2)u_2+(h^2)u_3=0$$
$$(6h)u_1+(h^2)u_2+(6h^2)u_3=0$$

นั่นคือ

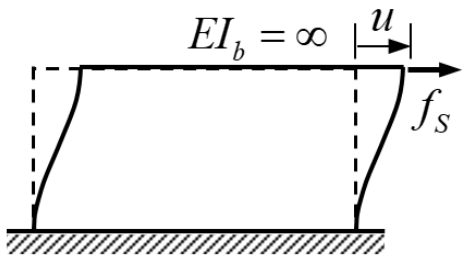
$$\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}6h^2 & h^2\\ h^2 & 6h^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6h\\ 6h\end{bmatrix}u_1=-\frac{6}{7h}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u_1 \qquad \text{(ข)}$$

แทนผลจากสมการ (ข) ลงในสมการแถวแรกใน (ก)

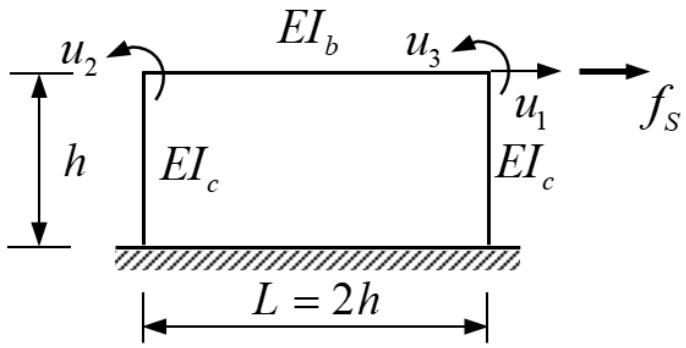
$$f_S=\frac{EI_c}{h^3}\left(24-\frac{6}{7h}\{6h \quad 6h\}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)u_1=\frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3}u_1$$

k_e

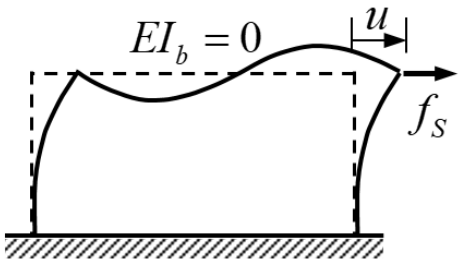




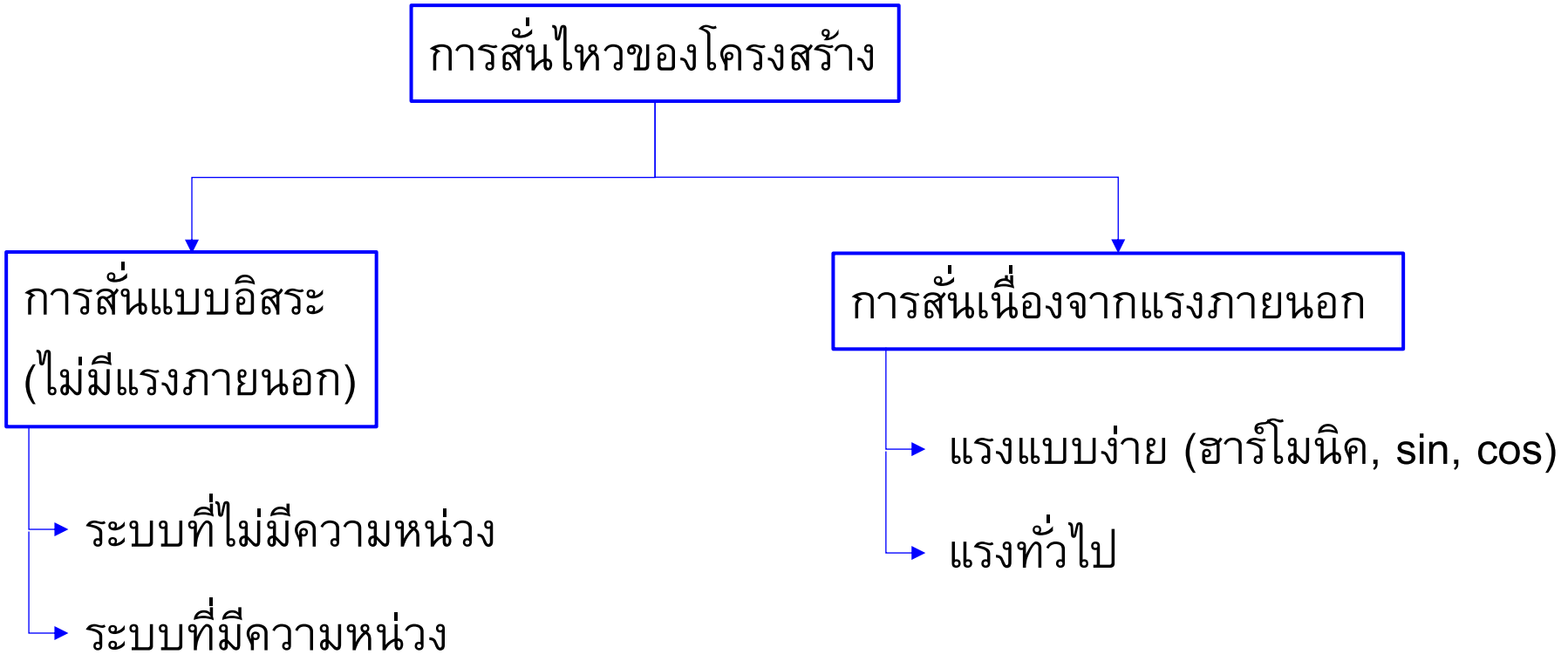
$$k = 24\frac{EI_c}{h^3}$$



$$k = \frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3} = 13.71\frac{EI_c}{h^3}$$



$$k = 6\frac{EI_c}{h^3}$$


การสั่นไหวของโครงสร้าง
การสั่นแบบอิสระ
(ไม่มีแรงภายนอก)
ระบบที่ไม่มีความหน่วง
ระบบที่มีความหน่วง
การสั่นเนื่องจากแรงภายนอก
แรงแบบง่าย (ฮาร์โมนิค, sin, cos)
แรงทั่วไป

การสั่นแบบอิสระของระบบที่ไม่มีความหน่วง

$$m\ddot{u} + \cancel{c\dot{u}}^{\,0} + ku = \cancel{p(t)}^{\,0} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{u} + ku = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \quad \text{หรือ} \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad \text{โดยที่} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

คำตอบ

$$\boxed{u(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t}$$

$A,\ B$ หาได้จากสภาวะเริ่มต้น

$$\dot{u}(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$
$$\ddot{u}(t) = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

หากสภาวะเริ่มต้นคือ ที่เวลา 0 วินาที

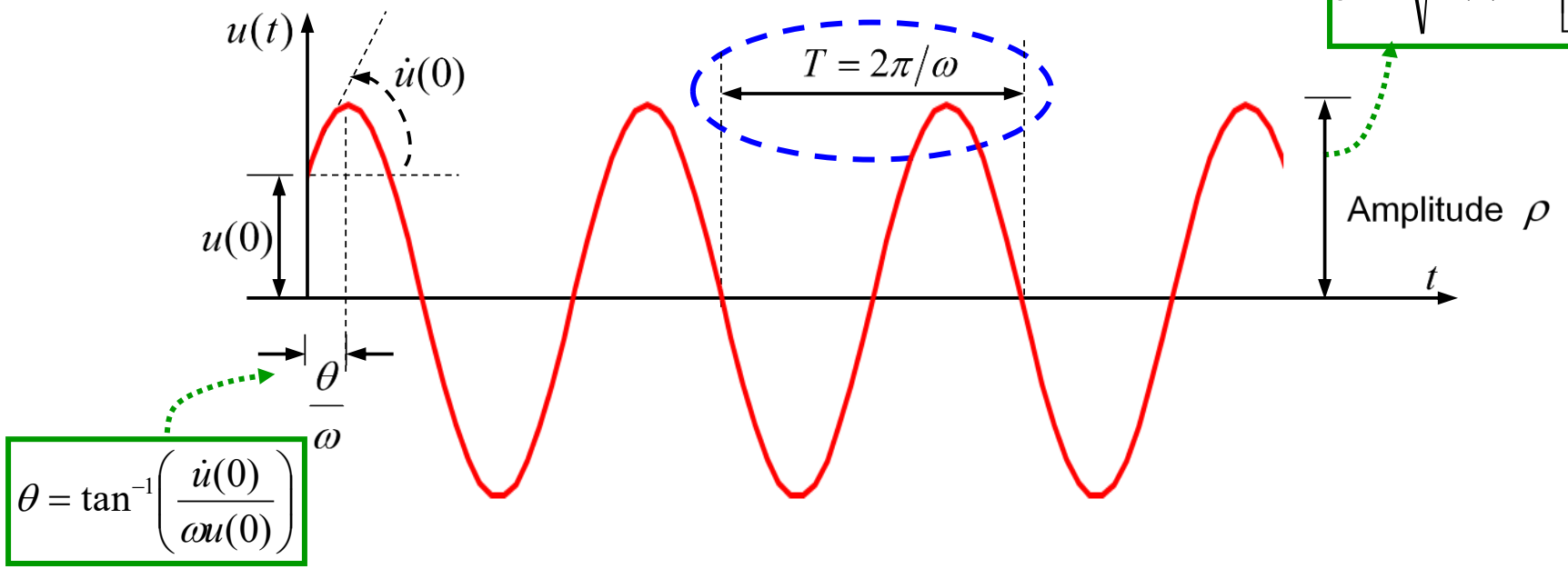
Displacement = $u(0)$ Velocity = $\dot{u}(0)$

$$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\sin\omega t + u(0)\cos\omega t}$$

การสั่นแบบอิสระของระบบที่ไม่มีความหน่วง

$$u(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$ หรือ $$u(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)$$

$$\rho = \sqrt{u(0)^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2}$$



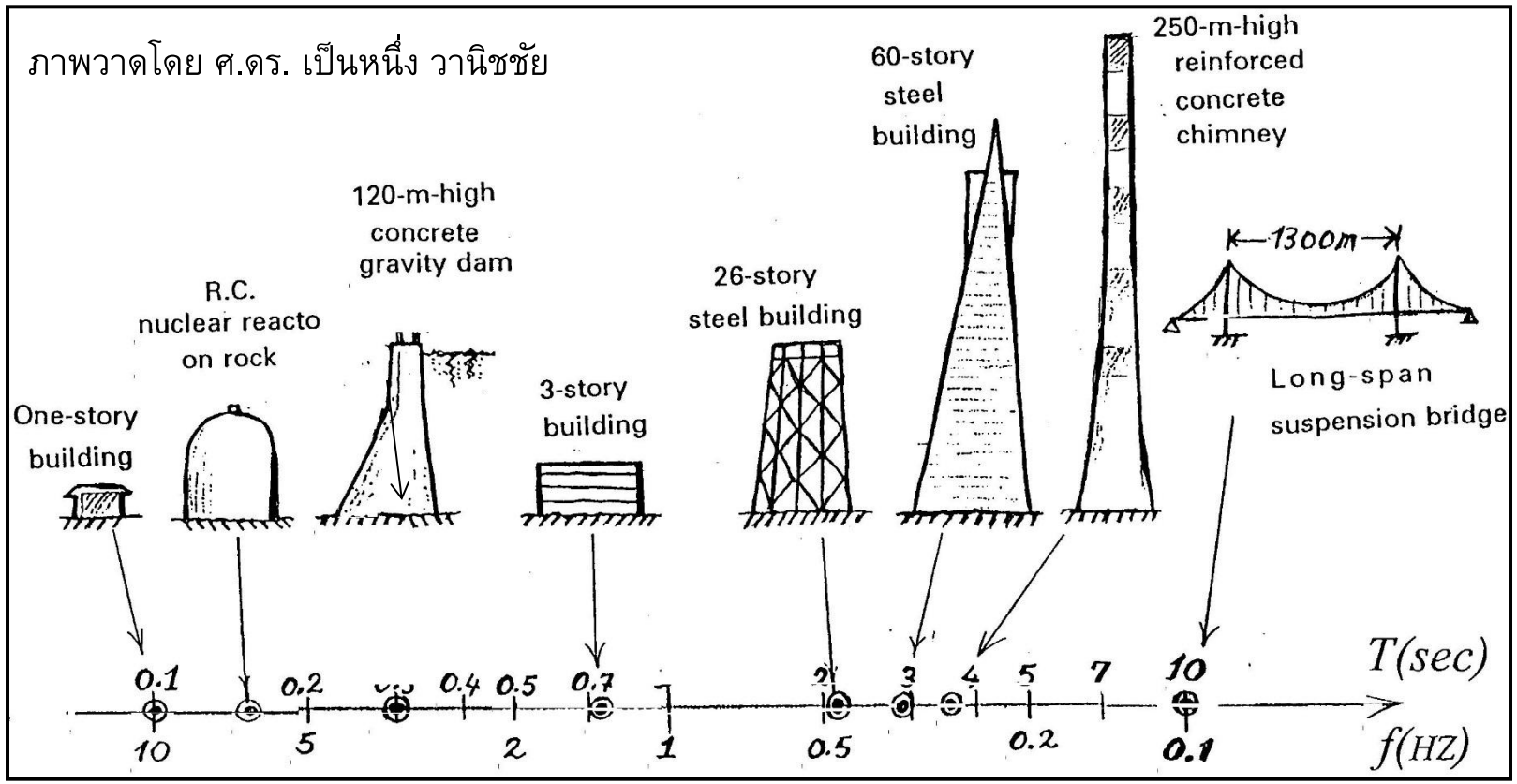
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)}\right)$$

คาบธรรมชาติ (Natural Period) $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ (sec.)

ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) $$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$ (1/sec.=Hz.)

Natural Frequency and Natural Period

Natural Frequency $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ Natural Period $T = \frac{1}{f}$



โครงสร้าง Rigid
ความถี่สูงหรือคาบสั้น

โครงสร้าง Flexible
ความถี่ต่ำหรือคาบยาว

การสั่นแบบอิสระของระบบที่มีความหน่วง

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

หารด้วย *m* ตลอด $\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$

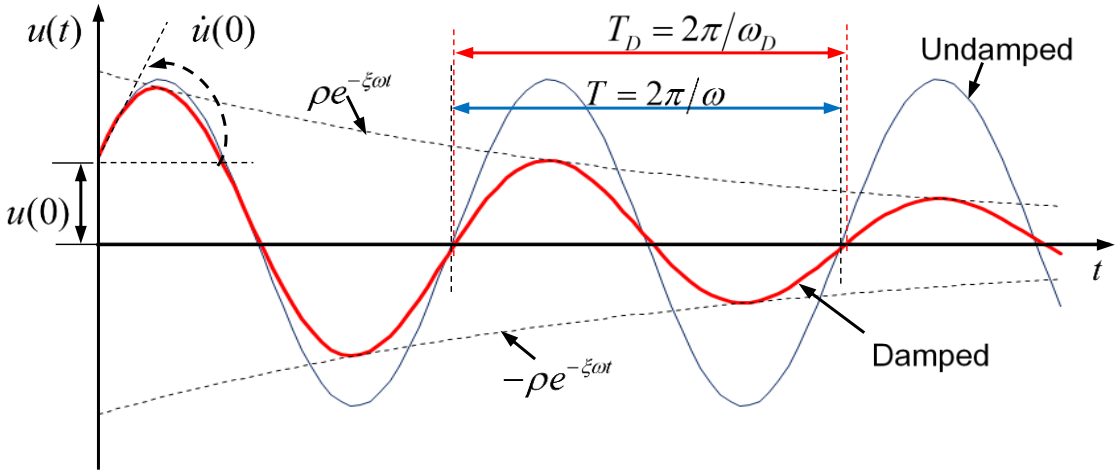
นิยาม Damping Ratio $\xi = \dfrac{c}{2m\omega}$

คำตอบ $u(t) \approx e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega t - \theta)$

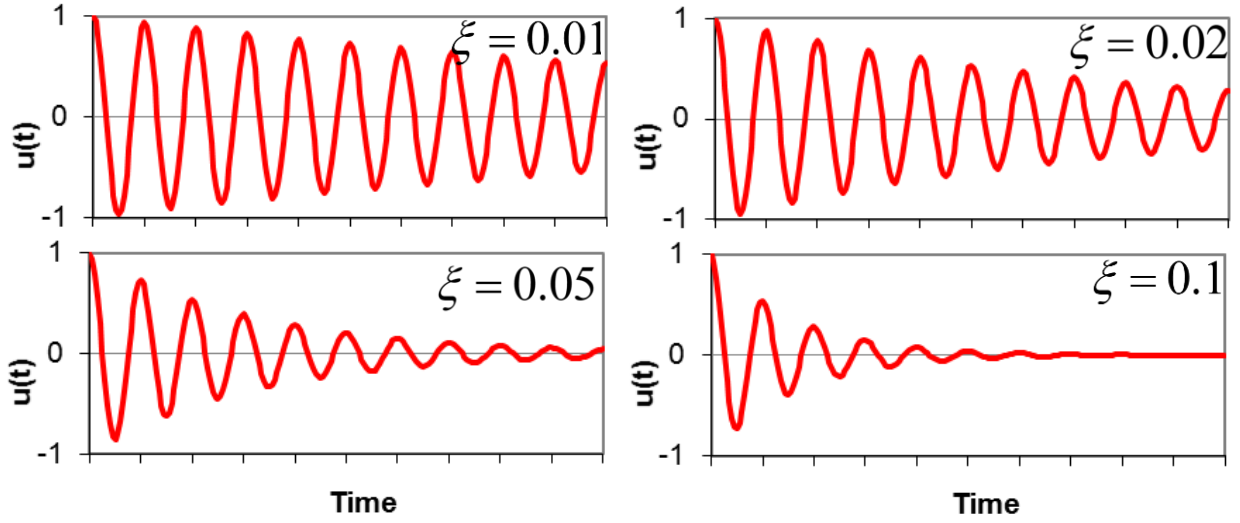
โดยทั่วไป $\xi \approx 0.01 - 0.05$

หรือ 1%-5%

โครงสร้างชะลูดมีค่า ξ ต่ำ



การสั่นแบบอิสระของระบบที่มีความหน่วง (Damped Free Vibration)



การสั่นแบบอิสระของระบบ SDOF ที่มี ξ = 1 % , 2% , 5%, 10%

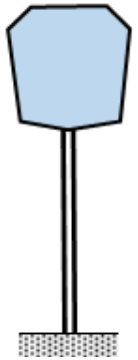
ω, ξ ตัวแปรสำคัญในการอธิบายการสั่นไหว

ถ้า ξ สูง ⇒ แอมปลิจูดลดลงด้วยอัตราเร็ว

ตัวอย่าง

จงคำนวณค่าคาบธรรมชาติของถังน้ำดังรูปที่มีน้ำหนัก 23 kN

- น้ำหนักเสา = 150 N/m
- เสาสูง 4.0 m เป็นท่อเหล็กมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 114 mm. หนา 6 mm.
- Modulus of Elasticity, $E = 200 \times 10^9$ N/m^2



วิธีทำ จำลองให้เป็นระบบ SDOF ที่มีคุณสมบัติดังนี้

I ของหน้าตัด $I = \frac{\pi}{64}\left(0.114^4 - 0.102^4\right) = 2.98\times10^{-6}\ \text{m}^4$

สติฟเนส $k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3\times200\times10^9\times2.98\times10^{-6}}{4^3} = 27{,}900\ \text{N/m}$

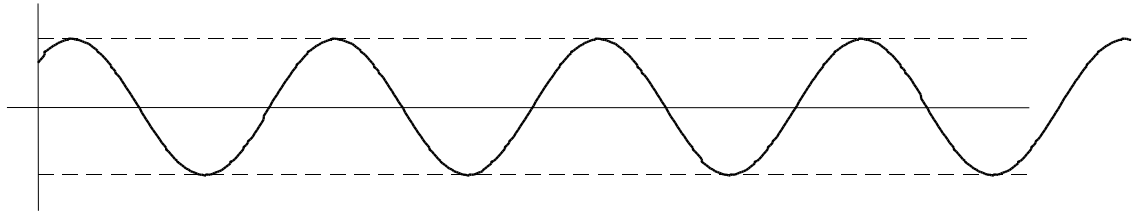
น้ำหนักเสา $150\times4 = 600 << 23{,}000\ \text{N}$ ดังนั้น ไม่คิดน้ำหนักเสา

มวลของระบบ $m = \frac{W}{g} = \frac{23{,}000}{9.81} = 2{,}345\ \text{kg}$

ความถี่ธรรมชาติ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{27{,}900}{2{,}345}} = 3.45\ \text{rad/sec}$

คาบธรรมชาติ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.82\ \text{sec}$

การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์มอนิก (Harmonically Forced Vibration)



- แรงแบบฮาร์มอนิก คือแรงที่กระทำกลับไปมาและมีความถี่คงที่เช่น ฟังก์ชัน Sine หรือ Cosine เป็นต้น
- แรงจากแผ่นดินไหวและแรงตามธรรมชาติทั่วไปไม่ใช่แรงแบบฮาร์มอนิก แต่สามารถพิจารณาว่าเป็นส่วนผสมของแรงย่อยแบบฮาร์มอนิก หลายแรงที่มีความถี่ต่างๆ ผสมกันอยู่ได้
- ผลตอบสนองของแรงทั่วไปมีพื้นฐานจากความเข้าใจผลตอบสนองจากแรงแบบฮาร์มอนิก

การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์มอนิก (Harmonically Forced Vibration)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

คำตอบ

$$u(t) \approx e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega t - \theta) + \frac{p_0}{k}\bar{D}\sin(\bar{\omega} t - \phi)$$

แอมปลิจูดลดลงตามเวลา

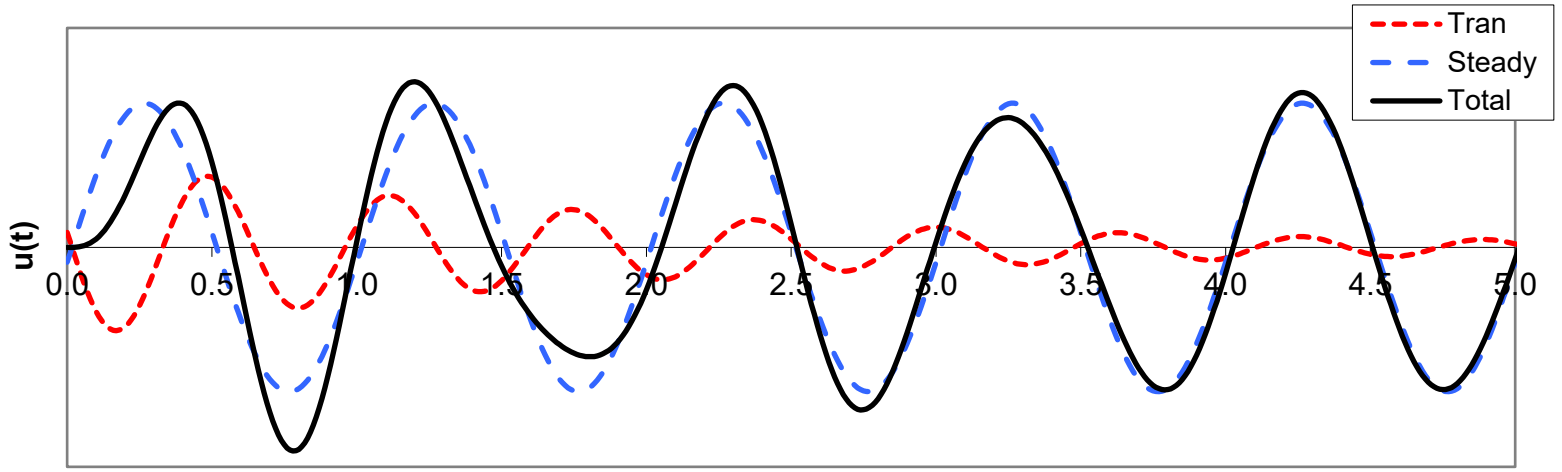
Transient Response

สั่นด้วยความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง ω

แอมปลิจูดคงที่

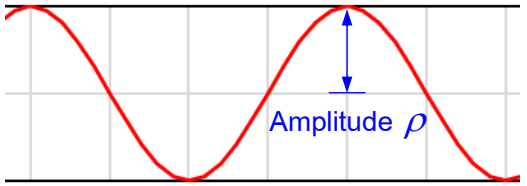
Steady State Response

สั่นด้วยความถี่ของแรงภายนอก $\bar{\omega}$



Steady State Response

$$u(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \phi)$$



ขนาดของแรงภายนอก

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\beta\xi)^2}}$$

ความถี่ของแรงภายนอก

Frequency Ratio $\beta = \dfrac{\bar{\omega}}{\omega}$

ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง

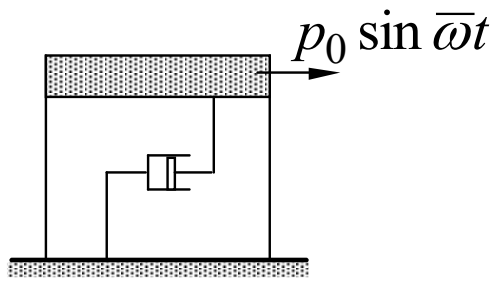
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \bar{D} \sin(\bar{\omega} t - \phi)$$

$$\bar{D} = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\beta\xi)^2}}$$

การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์มอนิก (Harmonically Forced Vibration)

แอมพลิจูดของ **Steady State Response** $= \frac{p_0}{k}\overline{D}$



ตัวคูณขยายเชิงพลศาสตร์

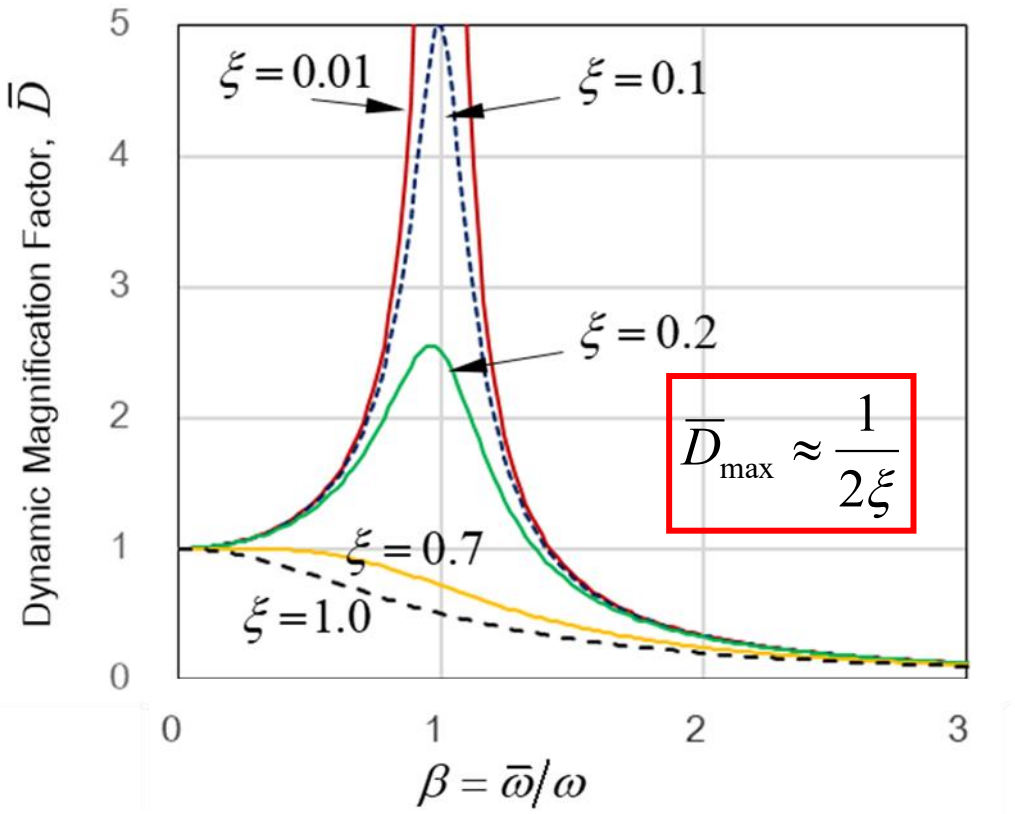
(Dynamic Magnification Factor)

$$\overline{D} = \frac{\text{Dynamic Response}}{\text{Static Response}}$$

มีค่าขึ้นกับ

- **ความถี่ของแรงและของโครงสร้าง** β
- **อัตราส่วนความหน่วง** ξ

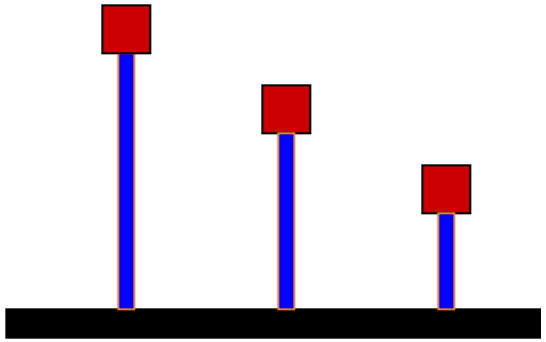
$$\overline{D} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\beta\xi\right)^2}}$$



β = ความถี่ของแรงภายนอก/ความถี่ของโครงสร้าง

การสั่นพ้อง (การกำทอน) (Resonance)

Example

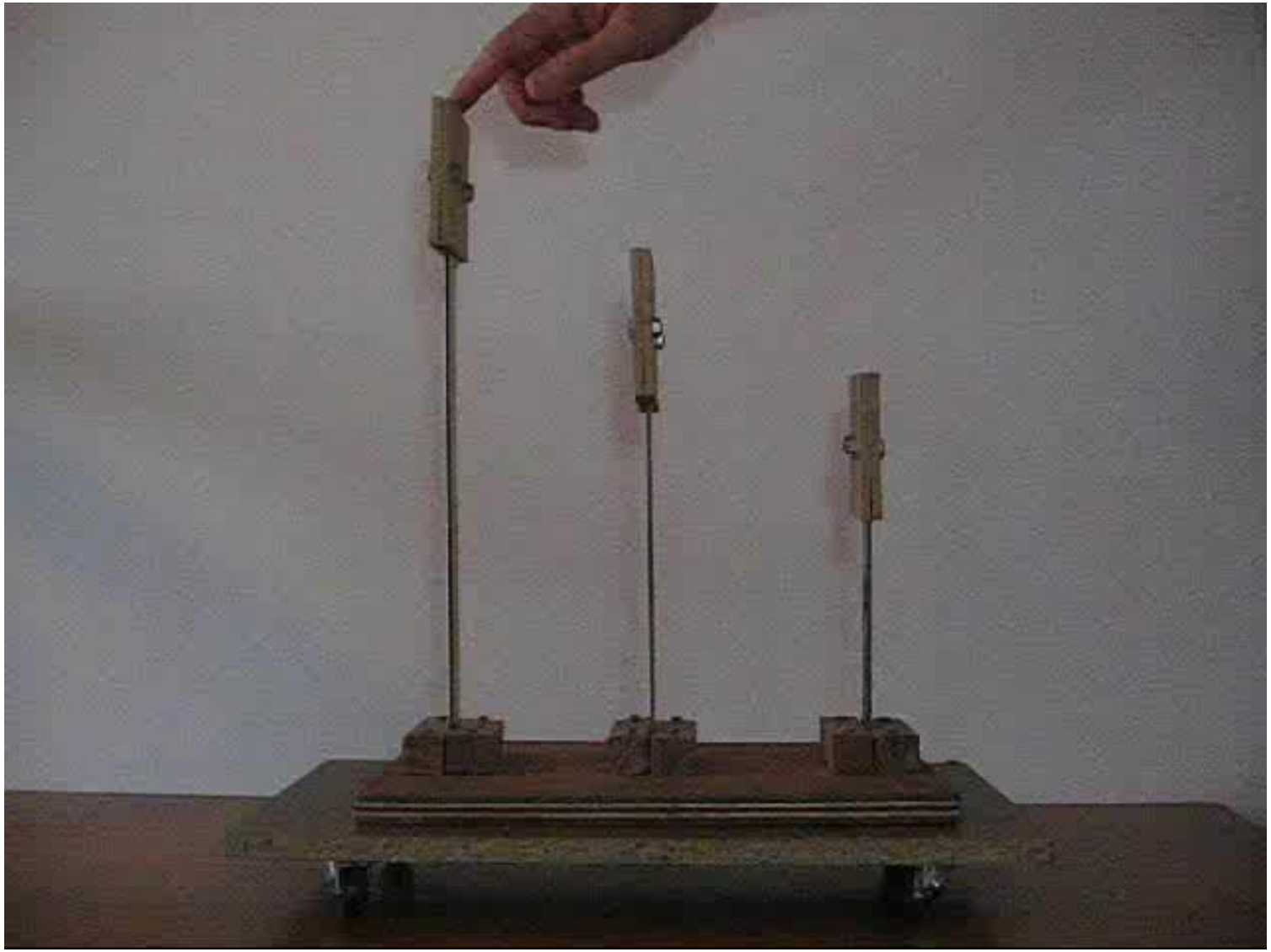


T สูง
f, ω ต่ำ

T ต่ำ
f, ω สูง

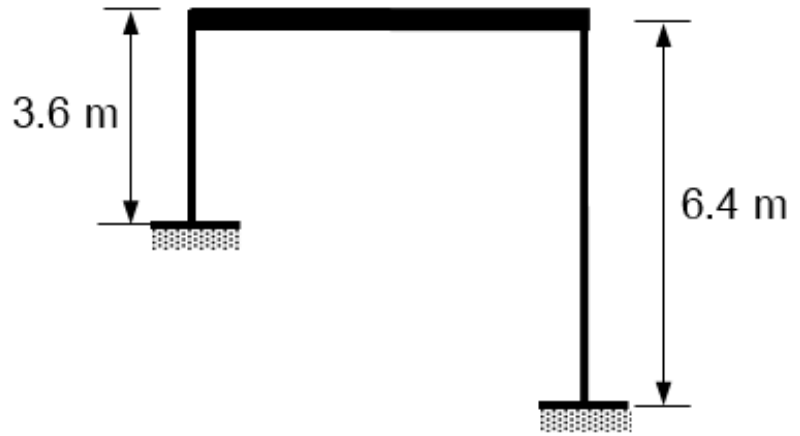
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

การตอบสนองของแบบจำลองอาคารต่อแผ่นดินไหว



ตัวอย่าง

พิจารณาโครงข้อแข็งดังรูป ประกอบด้วยเสาที่มีขนาด 0.25 m. x 0.25 m. E = 20,000 MPa คานมีความแข็งแกร่งสูง และมีมวล = 4,500 kg. ให้อัตราส่วนความหน่วง = 0.02 จงคำนวณแรงเฉือนที่เกิดขึ้นกับเสาทั้งสอง หากมีแรงภายนอกแบบฮาร์มอนิก กระทำในแนวราบที่คานด้วยค่า 5000 Sin(20 t) นิวตัน



<u>วิธีทำ</u> สติฟเนส ของระบบคือ

$$k = \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_2^3} = 12 \times 20000 \times 10^6 \times \left(0.25^4/12\right) \times \left(\frac{1}{3.6^3} + \frac{1}{6.4^3}\right)$$

$$= \left(1.674 + 0.298\right) \times 10^6 = 1.972 \times 10^6 \text{ N/m}$$

ความถี่ธรรมชาติ $\omega = \sqrt{k/m} = 20.94$ rad/sec

อัตราส่วนความถี่ $\beta = 20/20.94 = 0.955$

ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองคงตัว (Steady State Response)

$$\rho = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}}$$

$$\rho = \frac{5000}{1.972\times10^6}\frac{1}{\sqrt{\left(1-0.955^2\right)^2+\left(2\times0.02\times0.955\right)^2}} = 0.0264 \text{ m}$$

ค่าแรงเฉือนที่เสา หาจาก $V = ku$

ค่าแรงเฉือนที่เสาต้นสั้น $V_{\text{Short}} = 1.674\times10^6 \times 0.0264 = 44,200$ N

ค่าแรงเฉือนที่เสาต้นยาว $V_{\text{Long}} = 0.298\times10^6 \times 0.0264 = 7,870$ N

ควรระวัง ชิ้นส่วนที่มีสติฟเนสสูงจะรับแรงในสัดส่วนมาก

สำหรับในตัวอย่างนี้ ค่าการกระจัดที่เกิดขึ้นหากแรงกระทำเป็นแรงสถิตคือ

$$u_{st} = \frac{p_0}{k} = \frac{5000}{1.972\times10^6} = 2.535\times10^{-3} \text{ m}$$

ดังนั้น $\frac{u_{dyn}}{u_{st}} = \frac{2.64\times10^{-2}}{2.535\times10^{-3}} = 10.41$ นั่นคือ $\frac{V_{dyn}}{V_{st}} \approx 10$ เท่าตัว

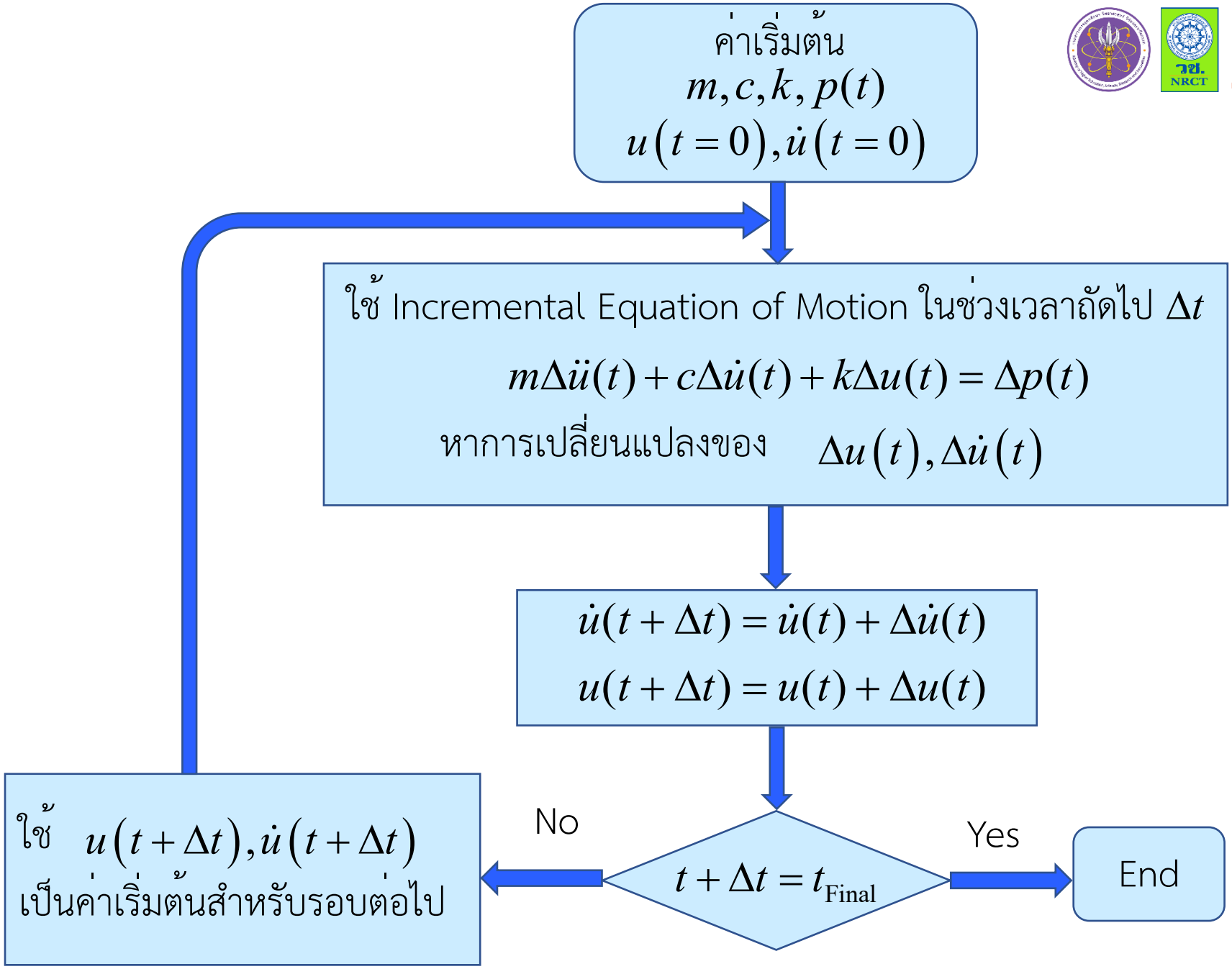
การสั่นเนื่องจากแรงทั่วไป



- **แรงจากแผ่นดินไหวและแรงตามธรรมชาติทั่วไป ไม่มีรูปแบบที่แน่นอน เขียนเป็นสมการไม่ได้**
- **การหาคำตอบแบบสมการจึงหาไม่ได้**
- **สามารถหาคำตอบโดยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method)**

  เรียกว่า การวิเคราะห์โดยวิธีประวัติเวลา (Time history analysis)

  และใช้วิเคราะห์สำหรับปัญหาแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear) ได้ด้วย


ค่าเริ่มต้น
$m, c, k, p(t)$
$u(t=0), \dot{u}(t=0)$
ใช้ Incremental Equation of Motion ในช่วงเวลาถัดไป Δt
$m\Delta\ddot{u}(t) + c\Delta\dot{u}(t) + k\Delta u(t) = \Delta p(t)$
หาการเปลี่ยนแปลงของ $\Delta u(t), \Delta\dot{u}(t)$
$\dot{u}(t+\Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta\dot{u}(t)$
$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta u(t)$
$t + \Delta t = t_{\text{Final}}$
No
Yes
End
ใช้ $u(t+\Delta t), \dot{u}(t+\Delta t)$
เป็นค่าเริ่มต้นสำหรับรอบต่อไป

สรุปขั้นตอนการคำนวณ (วิธี Linear Acceleration)

1. ต้องทราบค่าเริ่มต้น คือ $m, c, k, p(t)$ และค่าที่เวลาเริ่มต้น t ของ $u(t), \dot{u}(t)$
2. คำนวณค่า $f_D(t), f_S(t)$
3. คำนวณความเร่งเริ่มต้น $\ddot{u}(t) = \frac{1}{m}\left[p(t) - f_D(t) - f_S(t)\right]$
4. คำนวณค่า

$$\tilde{k}(t) = k + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}c$$

$$\Delta\tilde{p}(t) = \Delta p(t) + m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(t) + 3\ddot{u}(t)\right] + c\left[3\dot{u}(t) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)\right]$$

5. คำนวณค่า $\Delta u(t) = \Delta\tilde{p}(t)/\tilde{k}(t)$ $\Delta\dot{u}(t) = \frac{3}{\Delta t}\Delta u(t) - 3\dot{u}(t) - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)$
6. สรุปค่าการกระจัด และความเร็วที่เวลา $t + \Delta t$

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta\dot{u}(t)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta u(t)$$

จากนั้น เปลี่ยนค่าเวลาเป็น $t = t + \Delta t$

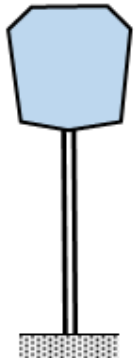
แล้วทำซ้ำวนรอบตั้งแต่ ขั้นที่ 1 โดยใช้ค่าสุดท้ายของ $u, \dot{u}$ ในรอบก่อนหน้า เป็นค่าเริ่มต้นสำหรับรอบต่อไป

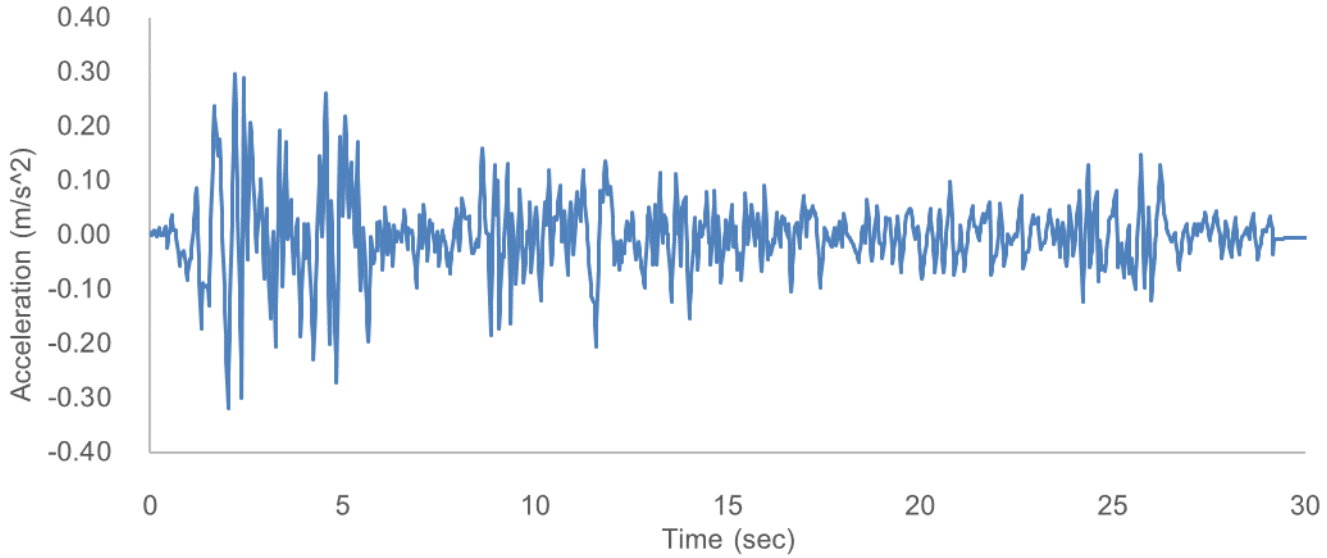
ตัวอย่าง

ถังน้ำในตัวอย่าง ที่มีน้ำหนัก 23 kN

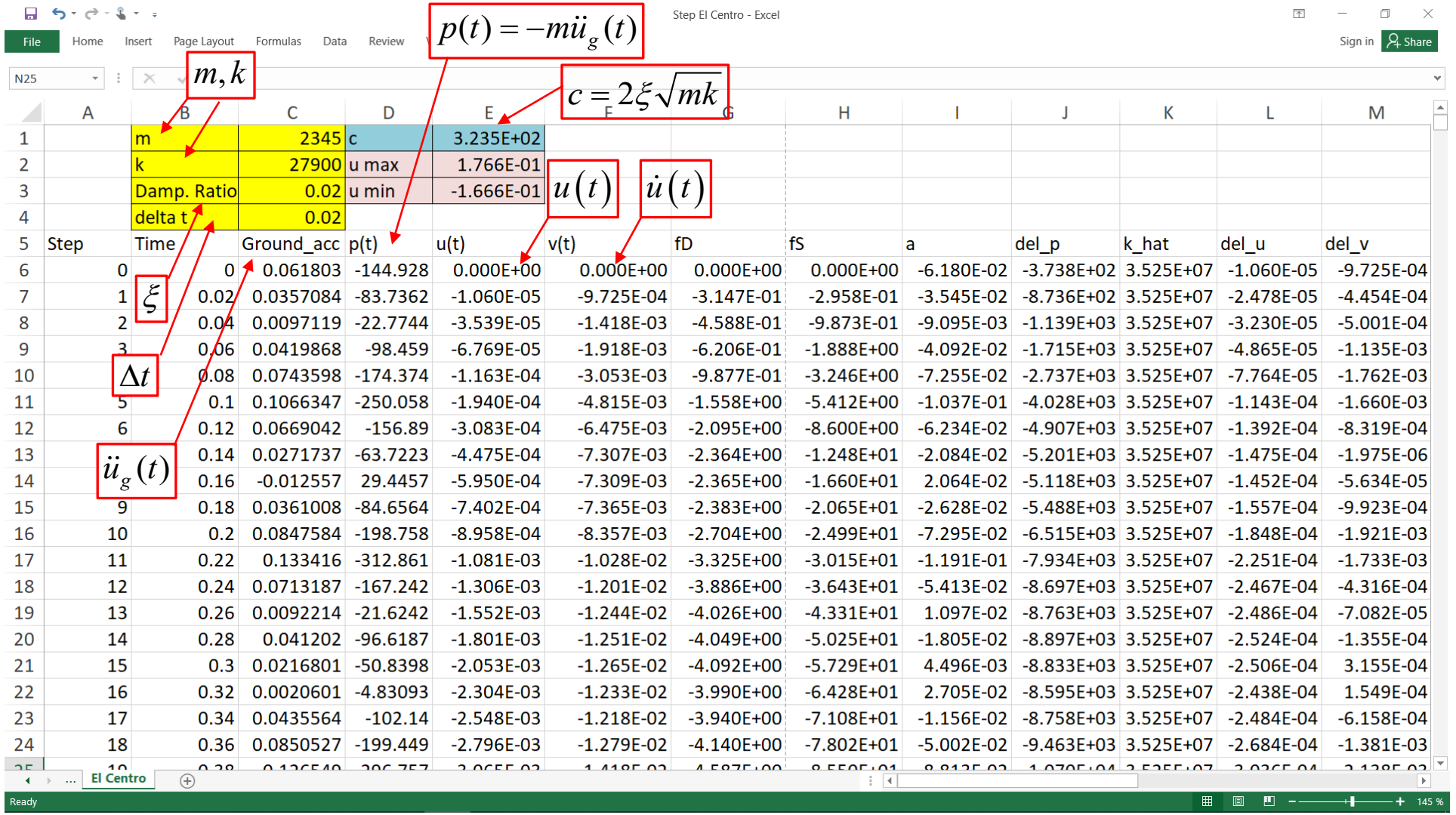
- น้ำหนักเสา = 150 N/m
- เสาสูง 4.0 m ท่อเหล็กขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 114 mm. หนา 6 mm.
- Modulus of Elasticity, E = 200 x 10^9 N/m^2
- Damping ratio, ξ = 0.02

จงคำนวณค่าสูงสุดของแรงเฉือนที่เสา เมื่อเกิดแผ่นดินไหวตามคลื่น El Centro 1940





จากตัวอย่าง $m = 2{,}345$ kg, $k = 36{,}770$ N/m



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		m	2345	c	3.235E+02								
2		k	27900	u max	1.766E-01								
3		Damp. Ratio	0.02	u min	-1.666E-01								
4		delta t	0.02										
5	Step	Time	Ground_acc	p(t)	u(t)	v(t)	fD	fS	a	del_p	k_hat	del_u	del_v
6	0	0	0.061803	-144.928	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-6.180E-02	-3.738E+02	3.525E+07	-1.060E-05	-9.725E-04
7	1	0.02	0.0357084	-83.7362	-1.060E-05	-9.725E-04	-3.147E-01	-2.958E-01	-3.545E-02	-8.736E+02	3.525E+07	-2.478E-05	-4.454E-04
8	2	0.04	0.0097119	-22.7744	-3.539E-05	-1.418E-03	-4.588E-01	-9.873E-01	-9.095E-03	-1.139E+03	3.525E+07	-3.230E-05	-5.001E-04
9	3	0.06	0.0419868	-98.459	-6.769E-05	-1.918E-03	-6.206E-01	-1.888E+00	-4.092E-02	-1.715E+03	3.525E+07	-4.865E-05	-1.135E-03
10	4	0.08	0.0743598	-174.374	-1.163E-04	-3.053E-03	-9.877E-01	-3.246E+00	-7.255E-02	-2.737E+03	3.525E+07	-7.764E-05	-1.762E-03
11	5	0.1	0.1066347	-250.058	-1.940E-04	-4.815E-03	-1.558E+00	-5.412E+00	-1.037E-01	-4.028E+03	3.525E+07	-1.143E-04	-1.660E-03
12	6	0.12	0.0669042	-156.89	-3.083E-04	-6.475E-03	-2.095E+00	-8.600E+00	-6.234E-02	-4.907E+03	3.525E+07	-1.392E-04	-8.319E-04
13	7	0.14	0.0271737	-63.7223	-4.475E-04	-7.307E-03	-2.364E+00	-1.248E+01	-2.084E-02	-5.201E+03	3.525E+07	-1.475E-04	-1.975E-06
14	8	0.16	-0.012557	29.4457	-5.950E-04	-7.309E-03	-2.365E+00	-1.660E+01	2.064E-02	-5.118E+03	3.525E+07	-1.452E-04	-5.634E-05
15	9	0.18	0.0361008	-84.6564	-7.402E-04	-7.365E-03	-2.383E+00	-2.065E+01	-2.628E-02	-5.488E+03	3.525E+07	-1.557E-04	-9.923E-04
16	10	0.2	0.0847584	-198.758	-8.958E-04	-8.357E-03	-2.704E+00	-2.499E+01	-7.295E-02	-6.515E+03	3.525E+07	-1.848E-04	-1.921E-03
17	11	0.22	0.133416	-312.861	-1.081E-03	-1.028E-02	-3.325E+00	-3.015E+01	-1.191E-01	-7.934E+03	3.525E+07	-2.251E-04	-1.733E-03
18	12	0.24	0.0713187	-167.242	-1.306E-03	-1.201E-02	-3.886E+00	-3.643E+01	-5.413E-02	-8.697E+03	3.525E+07	-2.467E-04	-4.316E-04
19	13	0.26	0.0092214	-21.6242	-1.552E-03	-1.244E-02	-4.026E+00	-4.331E+01	1.097E-02	-8.763E+03	3.525E+07	-2.486E-04	-7.082E-05
20	14	0.28	0.041202	-96.6187	-1.801E-03	-1.251E-02	-4.049E+00	-5.025E+01	-1.805E-02	-8.897E+03	3.525E+07	-2.524E-04	-1.355E-04
21	15	0.3	0.0216801	-50.8398	-2.053E-03	-1.265E-02	-4.092E+00	-5.729E+01	4.496E-03	-8.833E+03	3.525E+07	-2.506E-04	3.155E-04
22	16	0.32	0.0020601	-4.83093	-2.304E-03	-1.233E-02	-3.990E+00	-6.428E+01	2.705E-02	-8.595E+03	3.525E+07	-2.438E-04	1.549E-04
23	17	0.34	0.0435564	-102.14	-2.548E-03	-1.218E-02	-3.940E+00	-7.108E+01	-1.156E-02	-8.758E+03	3.525E+07	-2.484E-04	-6.158E-04
24	18	0.36	0.0850527	-199.449	-2.796E-03	-1.279E-02	-4.140E+00	-7.802E+01	-5.002E-02	-9.463E+03	3.525E+07	-2.684E-04	-1.381E-03

	A	B	C	D	E
1		m	2345	c	3.235E+02
2		k	27900	u max	1.766E-01
3		Damp. Ratio	0.02	u min	-1.666E-01
4		delta t	0.02		

$f_S = ku$

=$C$2*E6

$$\Delta\dot{u}(t) = \frac{3}{\Delta t}\Delta u(t) - 3\dot{u}(t) - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)$$

=3/$C$4*L6-3*F6-$C$4/2*I6

$p_{eff} = -m\ddot{u}_g$

=-$C$1*C6

$u(0) = 0 \quad \dot{u}(0) = 0$

$f_D = c\dot{u}$

=$E$1*F6

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{m}\left[p(t) - f_D(t) - f_S(t)\right]$$

=1/$C$1*(D6-G6-H6)

5	Step	Time	Ground_acc	p(t)	u(t)	v(t)	fD	fS	a	del_p	k_hat	del_u	del_v
6	0	0	0.061803	-144.928	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-6.180E-02	-3.738E+02	3.525E+07	-1.060E-05	-9.725E-04
7	1	0.02	0.0357084	-83.7362	-1.060E-05	-9.725E-04	-3.147E-01	-2.958E-01	-3.545E-02	-8.736E+02	3.525E+07	-2.478E-05	-4.454E-04
8	2	0.04	0.0097119	-22.7744	-3.539E-05	-1.418E-03	-4.588E-01	-9.873E-01	-9.095E-03	-1.139E+03	3.525E+07	-3.230E-05	-5.001E-04

$$\Delta\tilde{p}(t) = \Delta p(t) + m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(t) + 3\ddot{u}(t)\right] + c\left[3\dot{u}(t) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t)\right]$$

=(D7-D6)+$C$1*(6/$C$4*F6+3*I6)+$E$1*(3*F6+$C$4/2*I6)

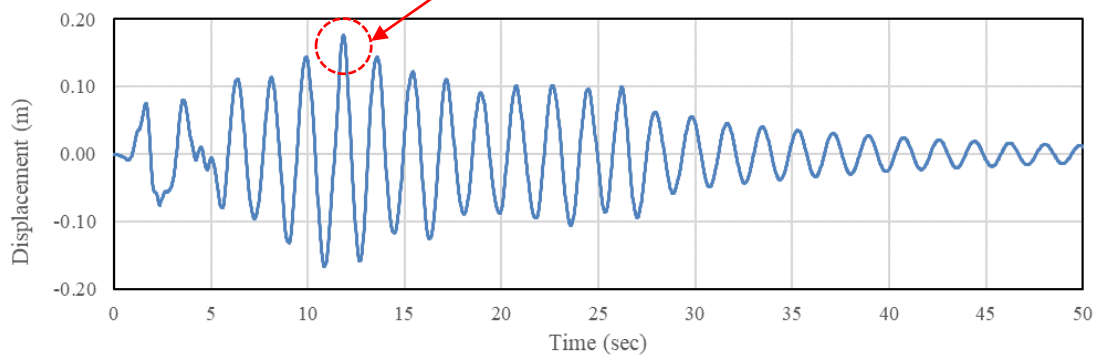
$\Delta u(t) = \Delta\tilde{p}(t)/\tilde{k}(t)$

=J6/K6

$$\tilde{k}(t) = k + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}c$$

=$C$2+6/$C$4^2*$C$1+3/$C$4*$E$1

597	591	11.82	1.3473054	-3159.43	1.761E-01	6.079E-02	1.967E+01	4.913E+03	-3.451E+00	1.890E+04	3.525E+07	5.361E-04	-6.746E-02
598	592	11.84	1.1943675	-2800.79	1.766E-01	-6.664E-03	-2.156E+00	4.928E+03	-3.295E+00	-2.753E+04	3.525E+07	-7.809E-04	-6.419E-02
599	593	11.86	1.0414296	-2442.15	1.758E-01	-7.085E-02	-2.292E+01	4.906E+03	-3.124E+00	-7.154E+04	3.525E+07	-2.029E-03	-6.062E-02

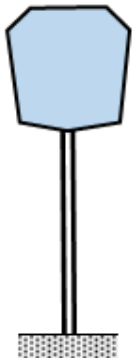


$$u_{max} = 0.177 \text{ m}$$

$$V_{max} = k \times u_{max}$$

$$= 27{,}900 \times 0.177 = 4{,}940 \text{ N}$$

Note



ตัวอย่างนี้แก้ปัญหาในรูปแบบสมการ

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

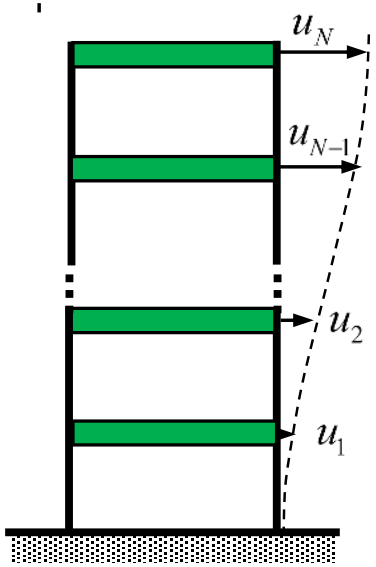
ในปัญหาแผ่นดินไหว นิยมเขียนสมการในรูปแบบใหม่ ที่สะดวกต่อการคำนวณ โดยป้อนคลื่นแผ่นดินไหวแทนแรงภายนอกได้โดยตรง

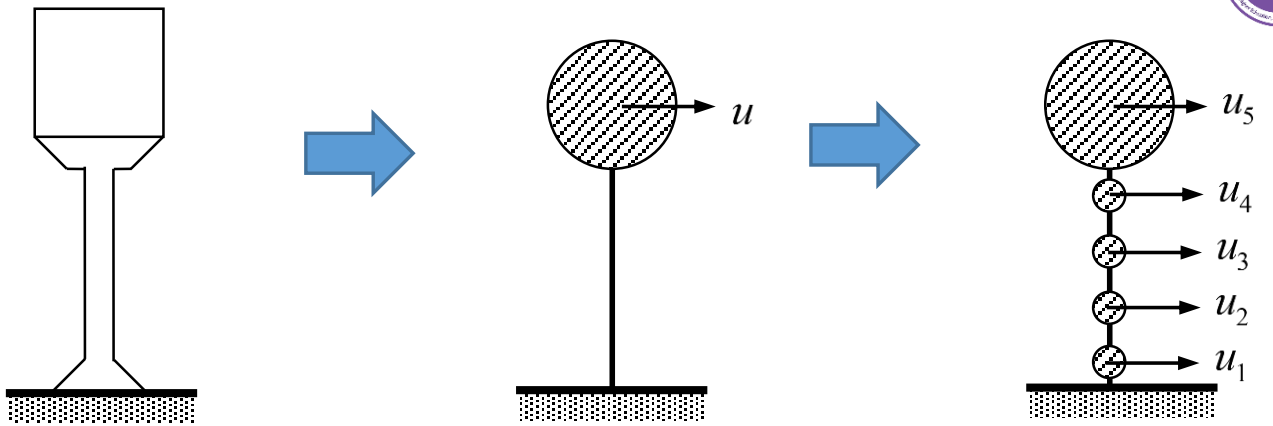
$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

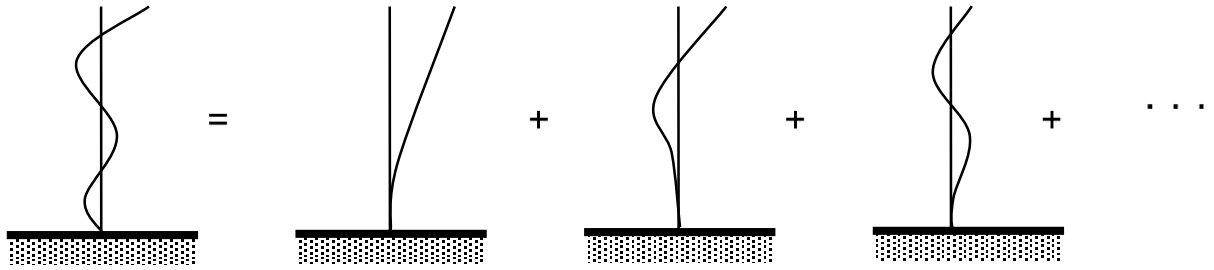
ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

Multi Degree-of-Freedom System





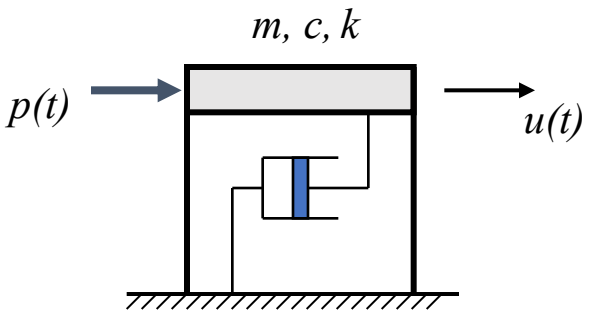
ตัวอย่างแนวคิดการวิเคราะห์ผลตอบสนองที่รวมผลของรูปร่างของการเปลี่ยนรูปของโครงสร้างและแอมพลิจูด ทำได้โดยการรวมผลตอบสนองจากรูปแบบย่อย ๆ ได้ ซึ่งเรียกว่าการวิเคราะห์เชิงโหมด (Modal analysis)

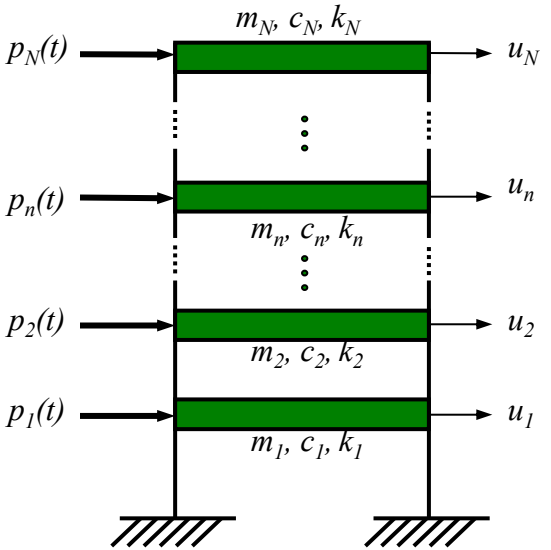


Total Response = Summation of modal response

ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

(Multi Degree of Freedom System , MDOF)





ระบบ SDOF $u(t)$ ขึ้นกับ

- แรงภายนอก
- คาบธรรมชาติ
- ความหน่วง

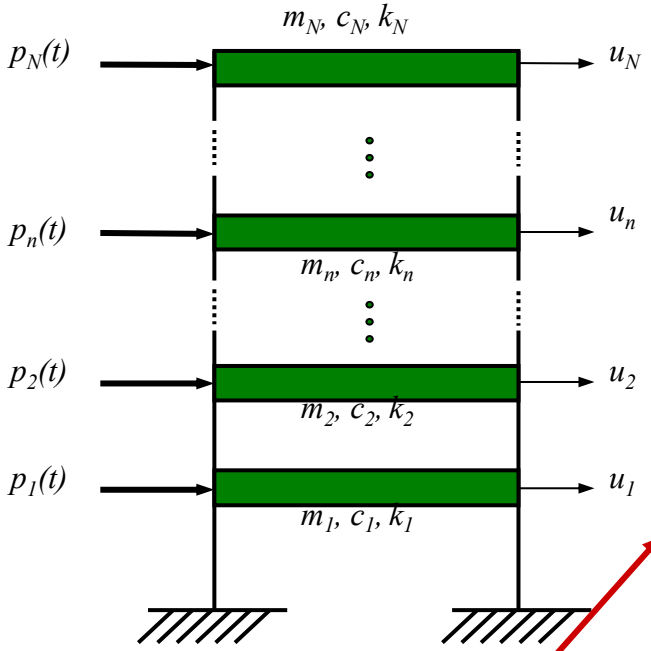
ระบบ MDOF $u(t)$ ขึ้นกับ

- แรงภายนอก
- คาบธรรมชาติ
- ความหน่วง
- ตำแหน่งของ $u(t)$หรือรูปร่างขณะเกิดการสั่นไหว

คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์
(Dynamic Properties)

ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

(Multi Degree of Freedom System , MDOF)



คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของระบบ MDOF

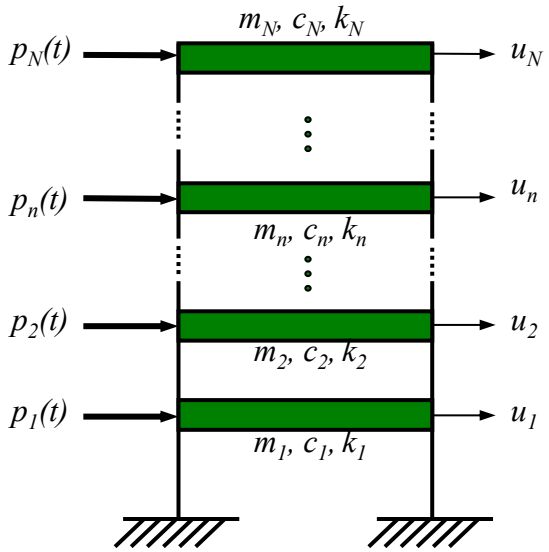
- ความหน่วง มักใช้ค่าจากการประมาณ ไม่ใช่จากการวิเคราะห์
- ตำแหน่งของ $u(t)$หรือรูปร่างขณะเกิดการสั่นไหว เรียกว่า รูปร่างการสั่นไหว (Mode Shape)
- คาบธรรมชาติ หรือ ความถี่ธรรมชาติ

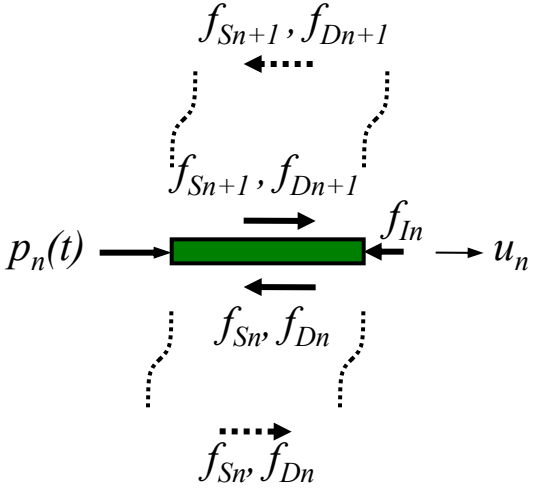
ได้จากการแก้ปัญหาที่เรียกว่า Eigenvalue
โดยสำหรับระบบที่มีจำนวน DOF เท่ากับ N ตัว
จะมี N ชุดคำตอบสำหรับความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว

การสร้างสมการการเคลื่อนที่

Formulation of Equation of Motion

หลักการสมดุลโดยตรง (Direct Equilibrium)





n-th Floor

Equilibrium Equation

n-th Floor $$f_{In} + f_{Dn} + f_{Sn} - f_{Dn+1} - f_{Sn+1} = p_n(t)$$

N-th Floor $$f_{IN} + f_{DN} + f_{SN} = p_N(t)$$

สมการการเคลื่อนที่สำหรับระบบ MDOF

แรงเฉื่อย

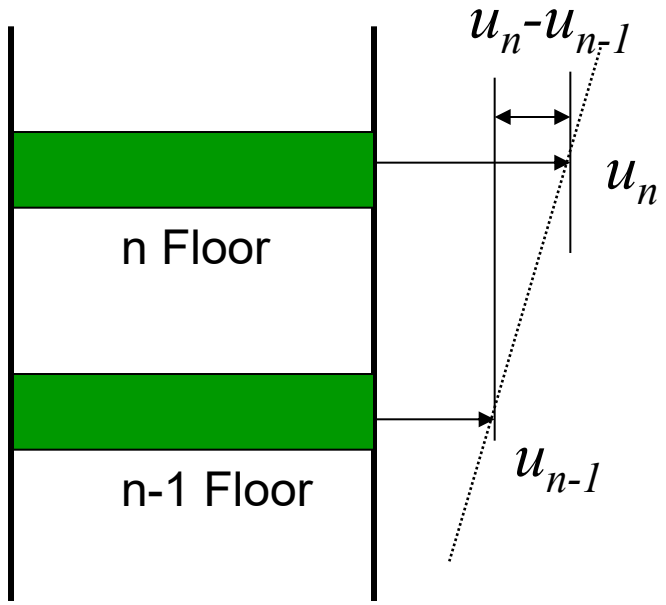
$$f_{In} = m_n \ddot{u}_n$$

แรงหน่วง

$$f_{Dn} = c_n(\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1})$$

แรงสติฟเนส

$$f_{Sn} = k_n(u_n - u_{n-1})$$



ตัวอย่างสมการการเคลื่อนที่สำหรับระบบ MDOF

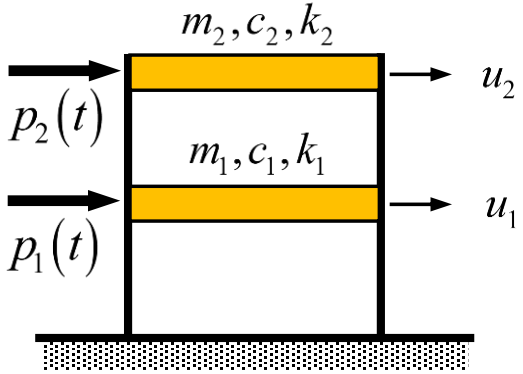
$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{C\dot{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots\cdots \\ u_N \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \cdots\cdots \\ p_N(t) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & m_N \end{bmatrix}$$

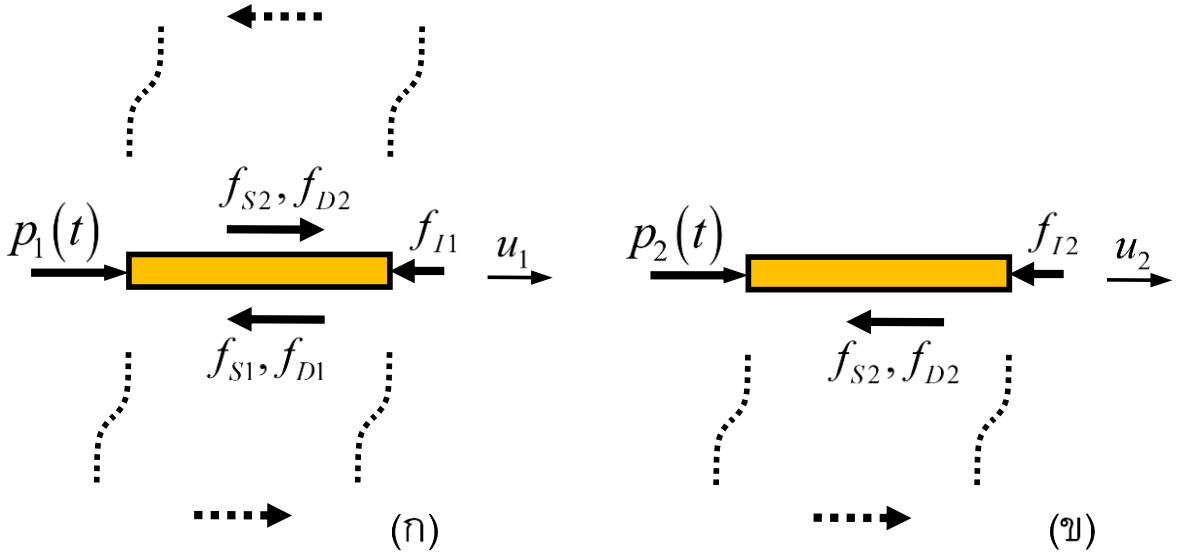
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & c_N \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & k_N \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

สร้างสมการการเคลื่อนที่สำหรับระบบดังรูป



ใช้วิธีสมดุล เขียนผังวัตถุอิสระสำหรับแต่ละชั้นได้ดังรูป



สมการสมดุล ชั้นที่ 1

$$f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} - f_{D2} - f_{S2} = p_1(t)$$

ชั้นที่ 2

$$f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} = p_2(t)$$

แทนค่า $f_{I1} = m_1\ddot{u}_1, \quad f_{D1} = c_1\dot{u}_1, \quad f_{S1} = k_1u_1$

$$f_{I2} = m_2\ddot{u}_2, \quad f_{D2} = c_2\left(\dot{u}_2 - \dot{u}_1\right), \quad f_{S2} = k_2\left(u_2 - u_1\right)$$

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_1u_1 - c_2\left(\dot{u}_2 - \dot{u}_1\right) - k_2\left(u_2 - u_1\right) = p_1$$

$$m_2\ddot{u}_2 + c_2\left(\dot{u}_2 - \dot{u}_1\right) + k_2\left(u_2 - u_1\right) = p_2$$

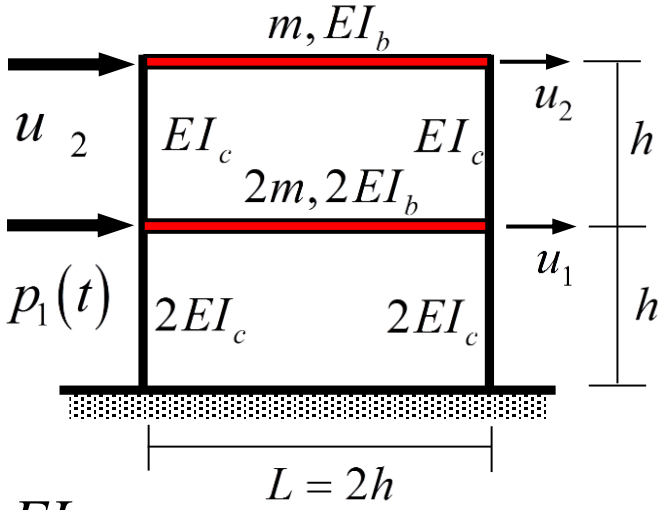
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p}(t)$$

ตัวอย่าง

จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของแบบจำลองอาคาร 2 ชั้น ซึ่งไม่มีความหน่วงและเสามีมวลน้อยมาก โดยให้พิจารณา 2 เงื่อนไขดังต่อไปนี้



1) สติฟเนสต้านการโก่งตัวของคานมีค่าเป็นอนันต์ $EI_b = \infty$

2) สติฟเนสต้านการโก่งตัวของคานมีค่าเท่ากับค่าของเสา $EI_b = EI_c$

1) สำหรับ $EI_b = \infty$ นั่นคือปลายเสาทั้งสองไม่มีการดัด และค่าสติฟเนสของเสาแต่ละต้น $= 12EI/h^3$ ดังนั้นค่าสติฟเนสรวมของเสาชั้นที่ 1 (k_1) และชั้นที่ 2 (k_2) มีค่าดังนี้

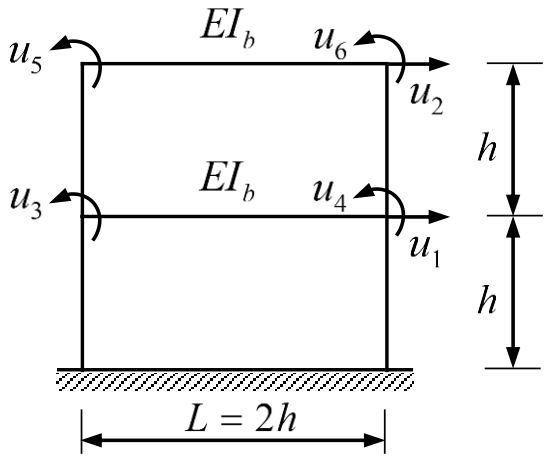
$$k_1 = 2 \times 12(2EI_c)/h^3 = 48EI_c/h^3$$

$$k_2 = 2 \times 12EI_c/h^3 = 24EI_c/h^3$$

และ $m_1 = 2m,\ m_2 = m$

สมการการเคลื่อนที่

$$m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{24EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

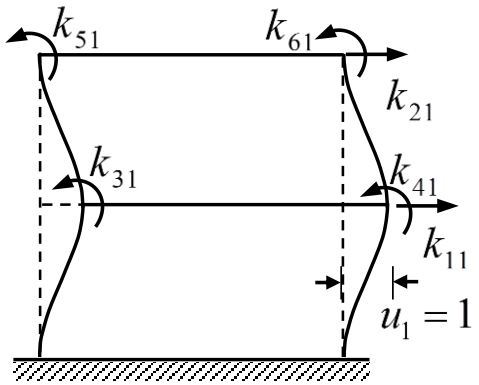


(ก)

2) สำหรับกรณีที่คานดัดตัวได้ ทำให้เกิดการหมุนที่จุดต่อ ซึ่งนับเป็น DOF สำหรับการเคลื่อนที่ด้วย

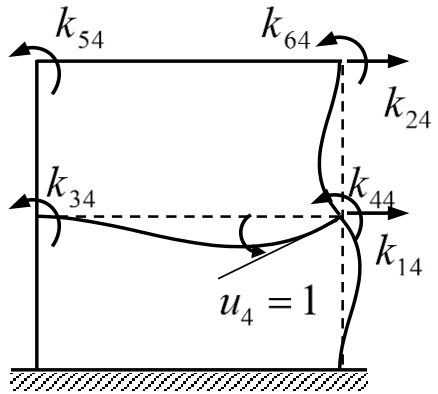
ดังนั้น ระบบนี้จึงมี DOF ทั้งหมดแสดงในรูป (ก)

สติฟเนส k_{ij} คือแรงที่ DOF i
เมื่อมีการเปลี่ยนรูปหนึ่งหน่วยที่ DOF j เท่านั้น



(ข)

$$\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \\ k_{51} \\ k_{61} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\times 12(2EI_c)/h^3 + 2\times 12EI_c/h^3 \\ -2\times 12EI_c/h^3 \\ 6(2EI_c)/h^2 - 6EI_c/h^2 \\ 6(2EI_c)/h^2 - 6EI_c/h^2 \\ -6EI_c/h^2 \\ -6EI_c/h^2 \end{Bmatrix} = \frac{EI_c}{h^3}\begin{Bmatrix} 72 \\ -24 \\ 6h \\ 6h \\ -6h \\ -6h \end{Bmatrix}$$



(ค)

$$\begin{Bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ k_{44} \\ k_{54} \\ k_{64} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6(2EI_c)/h^2 - 6EI_c/h^2 \\ 6EI_c/h^2 \\ 2(2EI_b)/L \\ 4(2EI_c)/h + 4(2EI_b)/L + 4EI_c/h \\ 0 \\ 2EI_c/h \end{Bmatrix} = \frac{EI_c}{h^3}\begin{Bmatrix} 6h \\ 6h \\ 2h^2 \\ 16h^2 \\ 0 \\ 2h^2 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 72 & -24 & 6h & 6h & -6h & -6h \\ & 24 & 6h & 6h & 6h & 6h \\ & & 16h^2 & 2h^2 & 2h^2 & 0 \\ & & & 16h^2 & 0 & 2h^2 \\ & SYM & & & 6h^2 & h^2 \\ & & & & & 6h^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

สมการการเคลื่อนที่ $\mathbf{M\ddot{u} + Ku} = \mathbf{p}(t)$

เมทริกซ์มวล มีค่าในแนวเส้นทแยงมุมที่เป็นศูนย์ตั้งแต่ DOF ที่ 3-6 ซึ่งเป็น DOF สำหรับการหมุนของจุดต่อที่สมมุติว่ามวลมีค่าน้อยมาก ลักษณะเช่นนี้จะทำให้การจัดการทางเมทริกซ์ในหลายกรณีหาค่าไม่ได้ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องทำการตัด DOF ที่ไม่มีมวลหรือไม่มีแรงเฉื่อยออกจากระบบแต่ยังคงผลจากแรงสติฟเนสเนื่องจากการเปลี่ยนรูปที่แต่ละ DOF ไว้ด้วยวิธี Static condensation

แบ่งส่วนของเมทริกซ์และเวกเตอร์ในสมการการเคลื่อนที่ โดยแยกเป็น DOF ที่มวลไม่เป็นศูนย์ และ DOF ที่มวลเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$



และ

$$\mathbf{K}=\frac{EI_c}{h^3}\left[\begin{array}{cc|cccc} 72 & -24 & 6h & 6h & -6h & -6h \\ & 24 & 6h & 6h & 6h & 6h \\ \hline & & 16h^2 & 2h^2 & 2h^2 & 0 \\ & & & 16h^2 & 0 & 2h^2 \\ & & & & 6h^2 & h^2 \\ & & & & & 6h^2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{t0} \\ \mathbf{K}_{0t} & \mathbf{K}_{00} \end{array}\right]$$

$$\left(\mathbf{K}_{t0}=\left(\mathbf{K}_{0t}\right)^T\right)$$

$$\mathbf{u}(t)=\left\{\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \hline u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{array}\right\} \qquad \mathbf{p}(t)=\left\{\begin{array}{c} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{array}\right\}$$



สมการการเคลื่อนที่ $$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{t0} \\ \mathbf{K}_{0t} & \mathbf{K}_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

เขียนเป็นสมการสำหรับแต่ละแถว

(1) $$\mathbf{M}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}_{tt}\mathbf{u}_t + \mathbf{K}_{t0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_t(t)$$

(2) $$\mathbf{K}_{0t}\mathbf{u}_t + \mathbf{K}_{00}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$$

สมการ (2) เขียนใหม่ $$\mathbf{u}_0 = -\left(\mathbf{K}_{00}\right)^{-1}\mathbf{K}_{0t}\mathbf{u}_t$$

แทนลง (1) $$\mathbf{M}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{K}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t)$$

โดยที่ Condense stiffness matrix คือ

$$\hat{\mathbf{K}}_{tt} = \mathbf{K}_{tt} - \left(\mathbf{K}_{0t}\right)^T\left(\mathbf{K}_{00}\right)^{-1}\mathbf{K}_{0t}$$



สำหรับตัวอย่างนี้ $\mathbf{M}_{tt} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{K}}_{tt} = \frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 54.88 & -17.51 \\ -17.51 & 11.61 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u}_t = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{p}_t(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

และจะได้

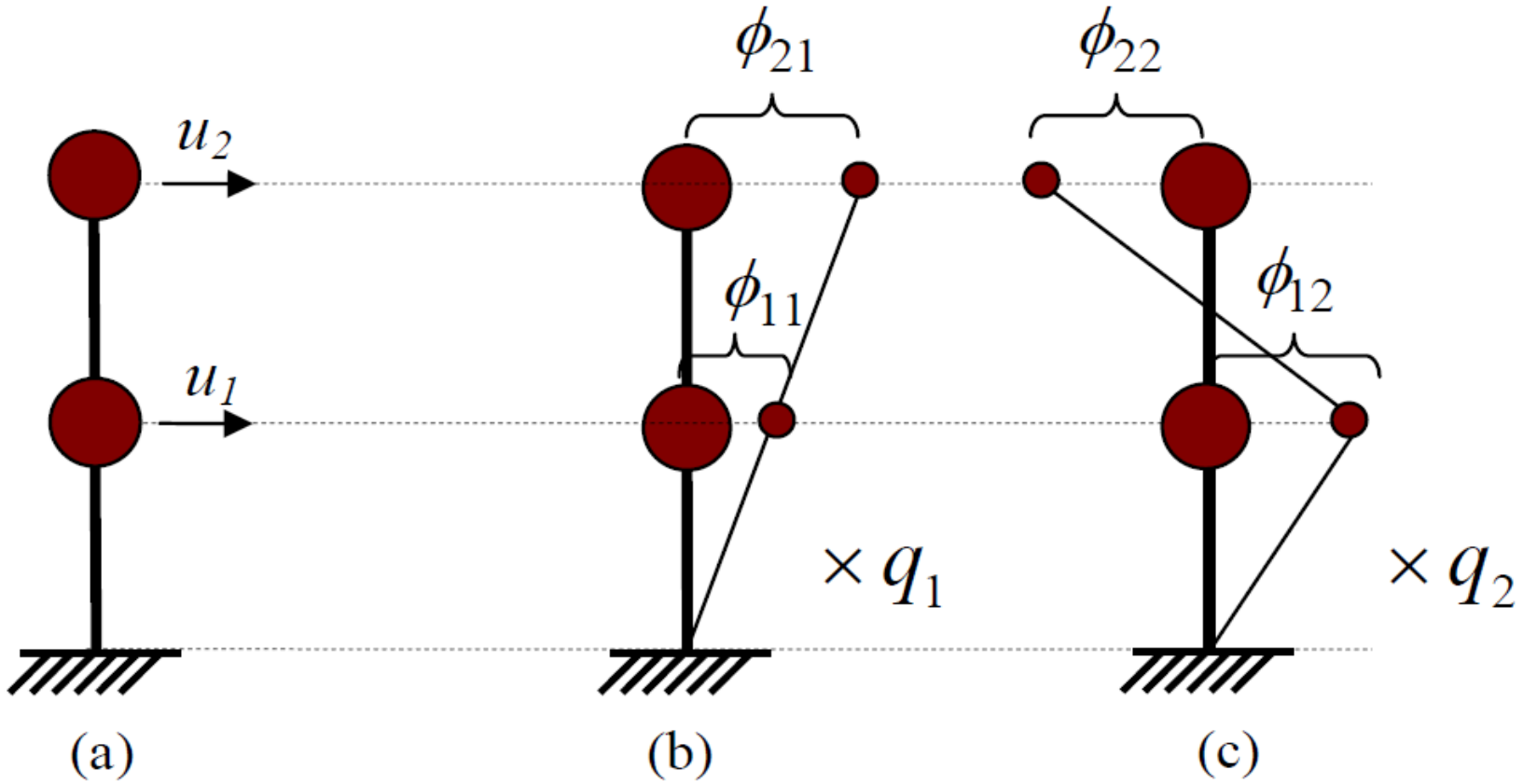
$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -0.4426 & -0.2459 \\ -0.4426 & -0.2459 \\ 0.9836 & -0.7869 \\ 0.9836 & -0.7869 \end{bmatrix}\mathbf{u}_t$$



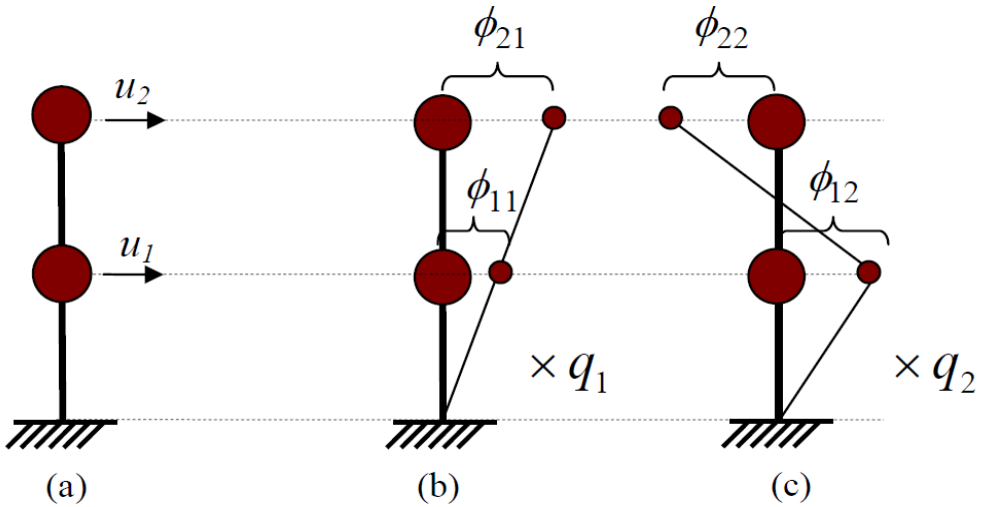
Mode of Response

พิจารณาระบบ 2DOF ที่ต้องการอธิบายการเคลื่อนที่ u_1 และ u_2

สามารถแทน u_1 และ u_2 ได้ด้วยผลรวมจาก 2 รูปแบบ (b) และ (c)



Mode of Response



(b) คือรูปแบบ (Mode) ที่ 1 มีรูปร่างของชั้น 1 และ 2 คือ ϕ_{11} และ ϕ_{21} และมีตัวปรับค่า (weight) เท่ากับ q_1

(c) คือรูปแบบ (Mode) ที่ 2 มีรูปร่างของชั้น 1 และ 2 คือ ϕ_{12} และ ϕ_{22} และมีตัวปรับค่า (weight) เท่ากับ q_2

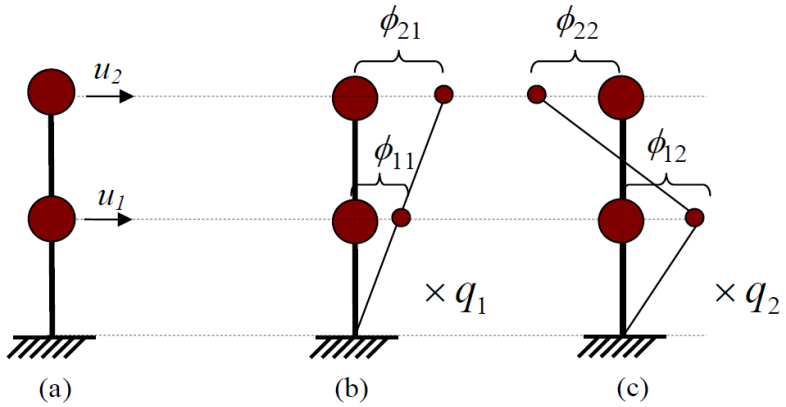
Mode of Response

ตัวอย่าง ถ้า $\phi_{11} = 0.5 \quad \phi_{21} = 1.0$ และ $\phi_{12} = 1.0 \quad \phi_{22} = -1.0$

สามารถอธิบายขณะที่ $u_1 = 2$ และ $u_2 = 1$ ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi q}$$



จากรูป

$u_1 = \phi_{11} q_1 + \phi_{12} q_2$ แทนค่า $2 = 0.5 q_1 + 1.0 q_2$

$u_2 = \phi_{21} q_1 + \phi_{22} q_2$ แทนค่า $1 = 1.0 q_1 - 1.0 q_2$

จะได้ $q_1 = 2, q_2 = 1$

Mode of Response

สำหรับ u ที่เวลา t ใด ๆ จะสามารถแทนค่าจาก ϕ_{ij} ที่ตำแหน่งนั้น และร่วมกับ q ที่เวลานั้นได้

สำหรับระบบที่มี N ชั้น การเคลื่อนตัวที่ชั้น x ใด ๆ

$$u_x = \phi_{x1}q_1 + \phi_{x2}q_2 + \phi_{x3}q_3 + \ldots + \phi_{xN}q_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \phi_{xi}q_i$$

Mode ที่ i

Mode Shape

Modal Response

ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว (Natural Frequency and Mode Shape)

การสั่นแบบอิสระสำหรับระบบที่ไม่คิดผลของความหน่วง

$$\mathbf{M\ddot{u} + Ku = 0}$$

การสั่นแบบอิสระมีคำตอบ $u(t)$ อยู่ในรูปของฟังก์ชันฮาร์โมนิค

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ ..... \\ u_N(t) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \phi_1 \sin(\omega t) \\ \phi_2 \sin(\omega t) \\ ..... \\ \phi_N \sin(\omega t) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi} \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi} \sin(\omega t)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \omega \boldsymbol{\varphi} \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \boldsymbol{\varphi} \sin(\omega t)$$

แทนค่าลงสมการการเคลื่อนที่

$$\mathbf{M\ddot{u} + Ku = 0}$$

$$\mathbf{M}\left(-\omega^2\boldsymbol{\varphi}\sin\left(\omega t\right)\right)+\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}\sin\left(\omega t\right)=\mathbf{0}$$

$$\left[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}\sin\left(\omega t\right)=\mathbf{0}$$

โดยทั่วไป $\sin\left(\omega t\right)$ เป็นค่าใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์

จะได้สมการในรูปแบบที่เรียกว่า Eigenvalue Problem

$$\left[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}=0$$

รากของสมการมี 2 รูปแบบ

ω^2 เรียกว่า Eigenvalue $\rightarrow$ Natural Frequency

$\boldsymbol{\varphi}$ เรียกว่า Eigenvector $\rightarrow$ Mode Shape

เงื่อนไขสำหรับการหาคำตอบ $\det\left|\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right|=0$

สมการที่มีเลขยกกำลัง N สำหรับตัวแปร ω^2

N คำตอบสำหรับ ω^2

จาก $$\mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\.....\\u_N(t)\end{Bmatrix}\approx\begin{Bmatrix}\phi_1\sin(\omega t)\\\phi_2\sin(\omega t)\\.....\\\phi_N\sin(\omega t)\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\varphi}\sin(\omega t)$$

จะได้ว่า ω คือค่าความถี่ธรรมชาติของระบบ

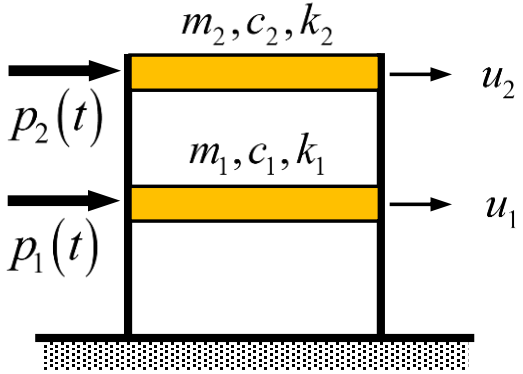
ดังนั้น มี N ค่าความถี่ธรรมชาติของระบบ

ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว (Natural Frequency and Mode Shape)

- N คำตอบที่แตกต่างกัน แสดงถึงรูปแบบของคำตอบที่แตกต่างกันหรือ Mode เหล่านั้น
- แต่ละ Mode มีคุณลักษณะในการสั่นไหวที่แตกต่างกัน
- ความถี่ธรรมชาติสำหรับ Mode ใด ๆ แสดงถึงจังหวะของการสั่นตามธรรมชาติของ Mode นั้น
- Mode ที่มีค่าความถี่ธรรมชาติน้อยที่สุดเรียกว่า รูปแบบการสั่นไหวพื้นฐาน (Fundamental Mode) หรือ Mode ที่หนึ่ง
- สำหรับ Mode ที่มีความถี่ธรรมชาติสูงขึ้นเรียกชื่อเป็น Mode ลำดับต่อ ๆ ไป

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์หาความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหวของโครงสร้างอาคาร 2 ชั้น แต่ละชั้นมีมวล 50 ton สติฟเนสของชั้น 1 (*k1*) เท่ากับ 40 x 10^6 N/m และสติฟเนสของชั้น 2 (*k2*) เท่ากับ 20 x 10^6 N/m



จากผลของตัวอย่างก่อน เมทริกซ์คุณสมบัติของระบบนี้คือ

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times 50 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ N/m}$$

ปัญหา Eigenvalue $$\left[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi} = 0$$

คำตอบอยู่ในเงื่อนไข $$\det\left|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right| = 0$$

$$\det\left[\begin{bmatrix} 60\times10^{6}-\omega^{2}\times50,000 & -20\times10^{6} \\ -20\times10^{6} & 20\times10^{6}-\omega^{2}\times50,000 \end{bmatrix}\right]=0$$

กระจายผลคูณสำหรับดีเทอร์มิแนนต์ จะได้

$$2.5\times10^{9}\omega^{4}-4\times10^{12}\omega^{2}+8\times10^{14}=0$$

มีคำตอบสำหรับ ω^2 คือ $\omega_n^2 = 234.3$ และ 1365.7 โดยที่ $n=1,2$

ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมประจำโหมดที่ 1 ω_1 = 15.31 rad/sec

ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมประจำโหมดที่ 2 ω_2 = 36.96 rad/sec

แทนค่า ω_n^2 เพื่อหา $\boldsymbol{\varphi}$ จากสมการ $\left[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}=0$

สำหรับ ω_1 = 15.31

$$\begin{bmatrix} 60\times10^6-15.31^2\times50,000 & -20\times10^6 \\ -20\times10^6 & 20\times10^6-15.31^2\times50,000 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

ได้ผลเป็น $48.28\times10^6\phi_{11}-20\times10^6\phi_{21}=0$

และ $-20\times10^6\phi_{11}+8.28\times10^6\phi_{21}=0$

ซึ่งถึงแม้มีสมการ 2 สมการ สำหรับ 2 ตัวแปร แต่ไม่สามารถแก้หาคำตอบของแต่ละตัวแปรได้ เนื่องจากสมการทั้งสองไม่อิสระต่อกัน หรือเป็นสมการเดียวกัน

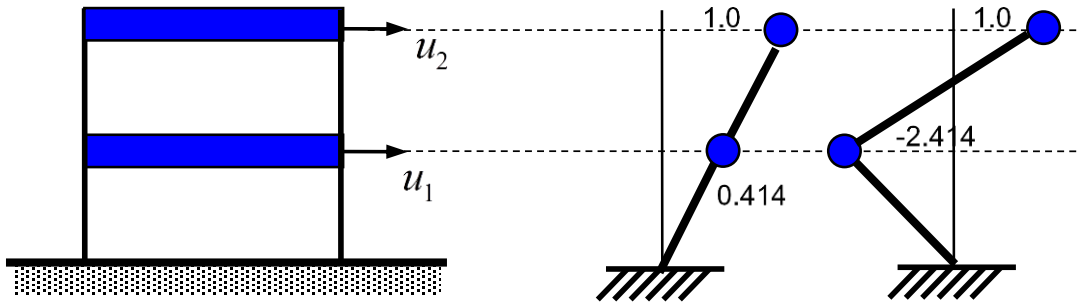
คุณสมบัติเช่นนี้คือลักษณะของรูปร่างการสั่นไหวที่ ไม่มีค่าเฉพาะเจาะจง แต่อัตราส่วนของค่ารูปร่างการสั่นไหวในโหมดเดียวกันมีค่าคงตัว เช่นจากตัวอย่างนี้ สามารถเขียนรูปร่างการสั่นไหวประจำโหมดที่ 1 ได้หลายแบบคือ

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.414 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 24.14 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.414 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0 \\ -2.414 \end{Bmatrix}$$

นั่นคือ ค่า ϕ_{ij} ในรูปร่างการสั่นไหวมีความสำคัญเพียงค่าสัมพัทธ์ระหว่างค่าของ DOF ต่าง ๆ เท่านั้น แต่ไม่มีผลของขนาด

เลือกให้ค่ารูปร่างที่ชั้นบนสุดเท่ากับ 1 จะได้ $\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.414 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$

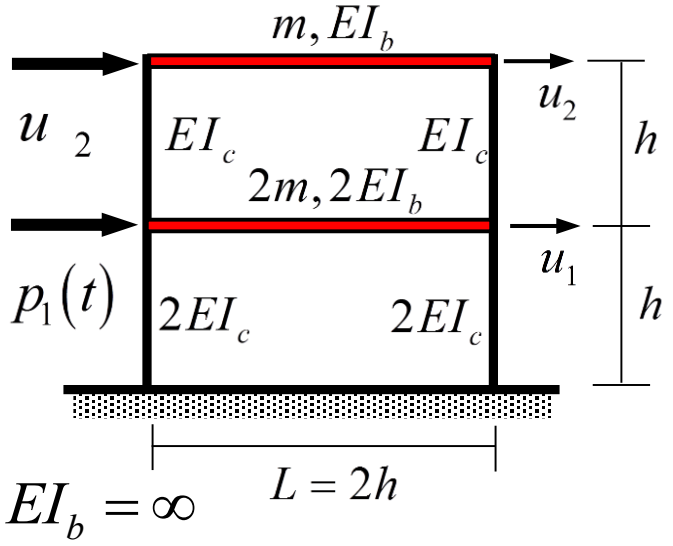
และสำหรับ ω_2 = 36.96 จะได้ $\boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} -2.414 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$



ตัวอย่าง

จงหาความถี่ธรรมชาติ และรูปร่างการสั่นไหวของอาคาร 2 ชั้น โดย I_c เสามีหน้าตัด 0.4x0.4 m

$m = 30$ ton $E = 25$ GPa $h = 5$ m



1) สติฟเนสต้านการโก่งตัวของคานมีค่าเป็นอนันต์ $EI_b = \infty$

2) สติฟเนสต้านการโก่งตัวของคานมีค่าเท่ากับค่าของเสา $EI_b = EI_c$

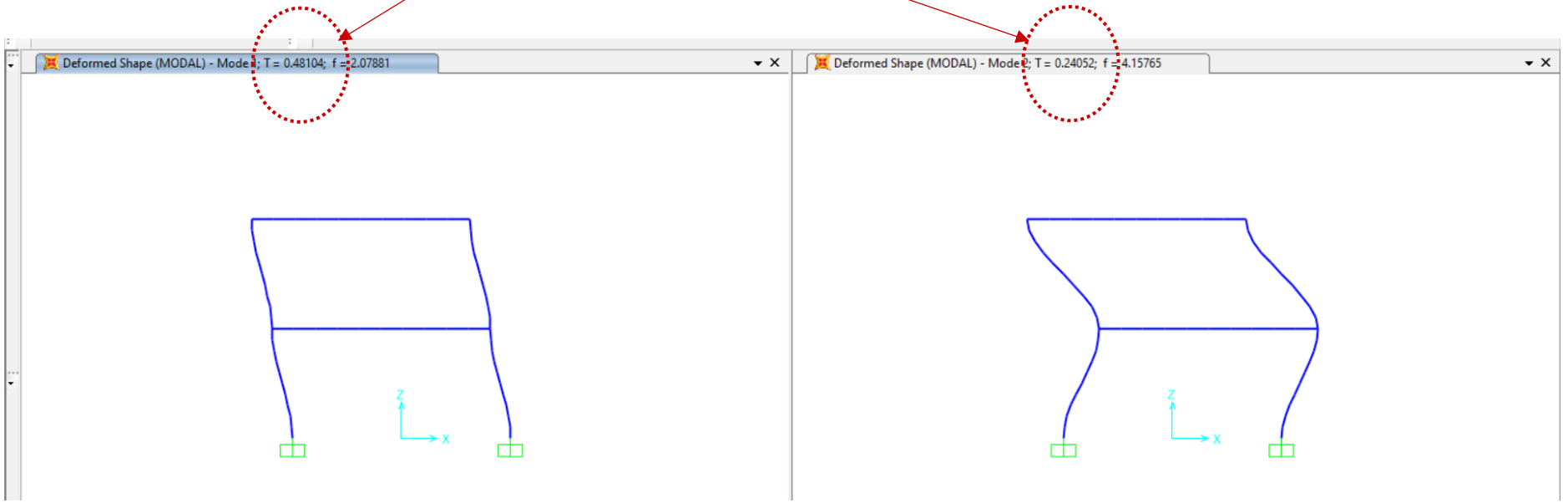
1) จากตัวอย่าง

$$\mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60{,}000 & 0 \\ 0 & 30{,}000 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

$$\mathbf{K} = \frac{24EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.072 & -1.024 \\ -1.024 & 1.024 \end{bmatrix} \times 10^7 \text{ N/m}$$

$\omega_1 = 13.064$ rad/s $\quad T_1 = 0.481$ s $\quad \boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$

$\omega_2 = 26.128$ rad/s $\quad T_2 = 0.240$ s



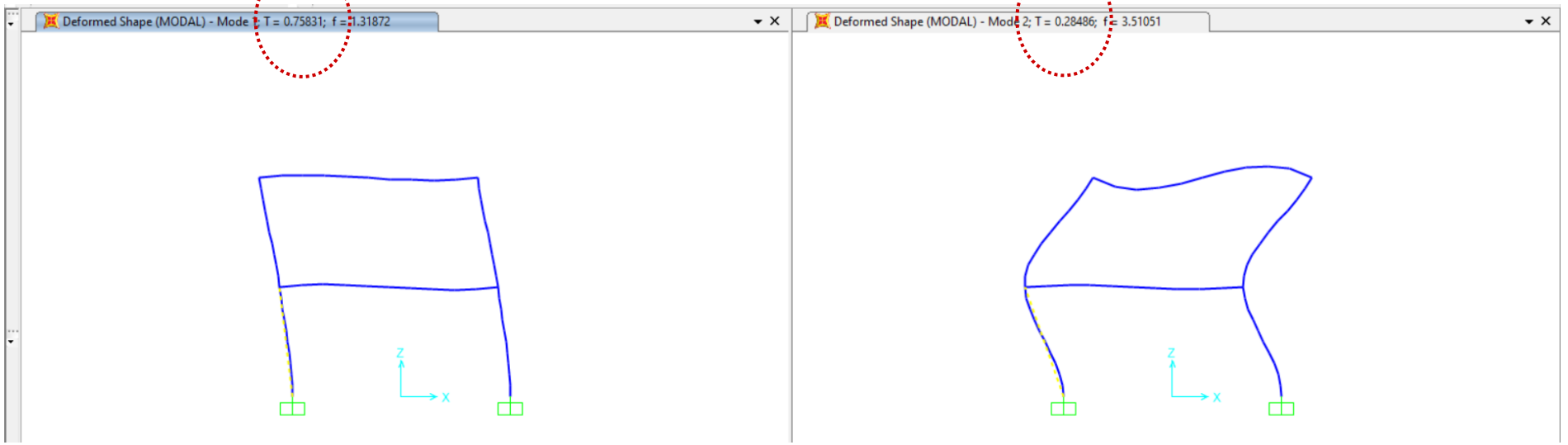
2) จากตัวอย่าง

$$\mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,000 & 0 \\ 0 & 30,000 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

$$\mathbf{K} = \frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 54.88 & -17.51 \\ -17.51 & 11.61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.342 & -0.747 \\ -0.747 & 0.4954 \end{bmatrix} \times 10^7 \text{ N/m}$$

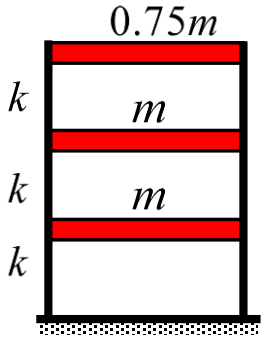
$$\omega_1 = 8.288 \text{ rad/s} \qquad T_1 = 0.758 \text{ s} \qquad \boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.387 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} -1.292 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 22.061 \text{ rad/s} \qquad T_2 = 0.285 \text{ s}$$



ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

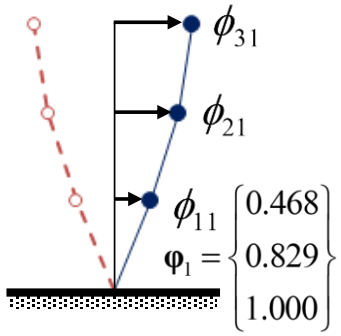
(Multi Degree of Freedom System , MDOF)



$m = 1.0$ ton

$k = 100$ kN/m

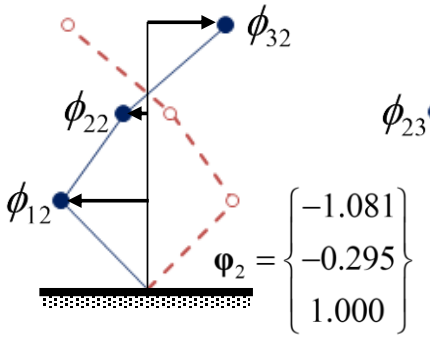
3-DOF Building



$f_1 = 0.761$ Hz.

$T_1 = 1.315$ s.

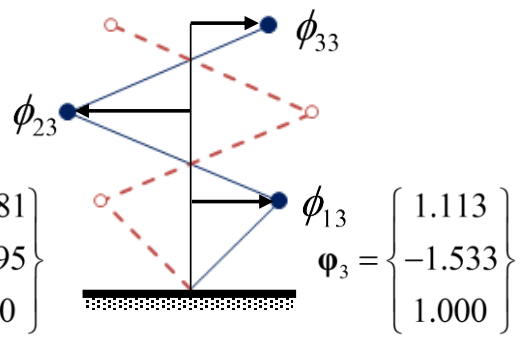
Mode 1



$f_2 = 2.091$ Hz.

$T_2 = 0.478$ s.

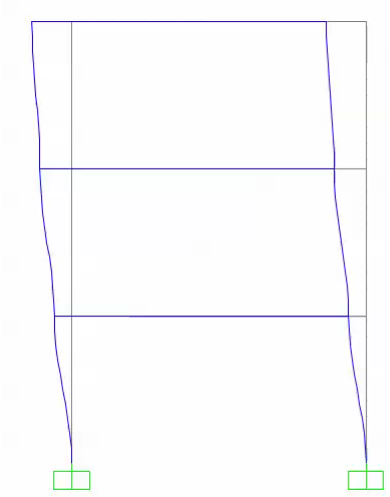
Mode 2



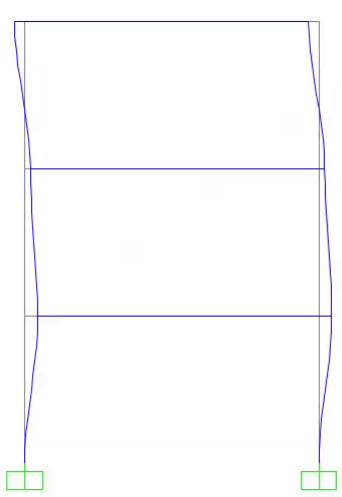
$f_3 = 2.924$ Hz.

$T_3 = 0.342$ s.

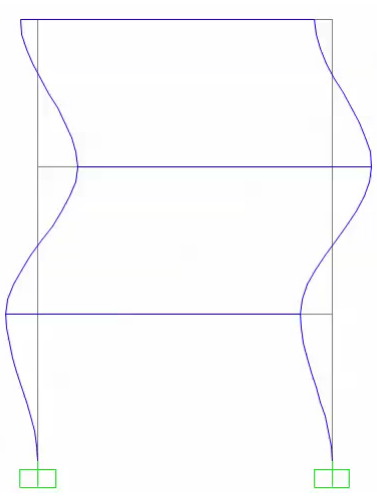
Mode 3



Mode 1



Mode 2



Mode 3

คุณสมบัติเชิงตั้งฉากของเมทริกซ์คุณสมบัติ

Orthogonality Property

จาก $$\left[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}=0$$

คำตอบของ Mode ที่ n และ Mode ที่ m

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \times \left[\mathbf{K}-\omega_n^2\mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}_n=0$$

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \times \left[\mathbf{K}-\omega_m^2\mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}_m=0$$

สมการลบกัน จะได้

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_n-\boldsymbol{\varphi}_n^T\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_m=\omega_n^2\boldsymbol{\varphi}_m^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_n-\omega_m^2\boldsymbol{\varphi}_n^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_m$$

(1 x N) (N x N) (N x 1) = 1 x 1 (Scalar)

คุณสมบัติ Orthogonality

จาก

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n = \left(\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n\right)^T = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K}^T \boldsymbol{\varphi}_m = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m$$

และ $$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m$$

ดังนั้นสมการ

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m = \omega_n^2 \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n - \omega_m^2 \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m$$

เขียนได้เป็น $$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m = 0$$

ดังนั้น

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ M_n & \text{for } n = m \end{cases} \qquad \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \omega_n^2 M_n = K_n & \text{for } n = m \end{cases}$$

คุณสมบัติ Orthogonality

เรียก M_n และ K_n ว่า มวลเชิงโหมด (Modal mass) และสติฟเนสเชิงโหมด (Modal stiffness) จากคุณสมบัติเชิงตั้งฉากของเมทริกซ์คุณสมบัติ เขียนได้เป็น

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_N \end{bmatrix}$$

การวิเคราะห์ผลตอบสนองโดยวิธี
การวิเคราะห์เชิงโหมด Modal Analysis

หลัก Mode of Response

$$\mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \cdots \\ q_N(t) \end{Bmatrix}=\mathbf{\Phi q}(t)$$

$u_i(t)$ Displacement of i-DOF

$q_i(t)$ Modal displacement of i-DOF

ϕ_{ij} Mode shape at i-DOF, of j-mode

$$\boxed{\mathbf{u}(t)=\mathbf{\Phi q}(t)}$$

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \cdots & q_N(t) \end{bmatrix}^T$$

การวิเคราะห์ผลตอบสนองโดยวิธี
การวิเคราะห์เชิงโหมด Modal Analysis

ระบบที่ไม่คิดความหน่วง

$$\mathbf{M\ddot{u} + Ku = p(t)}$$

แทนค่า $\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi q}(t)$

$$\mathbf{M\Phi\ddot{q} + K\Phi\, q = p(t)}$$

คูณข้างหน้าด้วย $\mathbf{\Phi}^T$

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi\,\ddot{q} + \Phi}^T\mathbf{K\Phi\, q = \Phi}^T\mathbf{p(t)}$$

Orthogonality ⇒ Diagonal Matrix

สามารถจัดรูปสมการการเคลื่อนที่ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dots \\ \ddot{q}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{Bmatrix} = \mathbf{p}^*$$

Modal mass $M_n = \boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n$

Modal stiffness $K_n = \boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n$

Modal force $\mathbf{p}^* = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{p}$ $\quad \mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} \phi_{11} p_1 + \phi_{21} p_2 + \dots \phi_{N1} p_N \\ \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2 + \dots \phi_{N2} p_N \\ \vdots \\ \phi_{1N} p_1 + \phi_{2N} p_2 + \dots \phi_{NN} p_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_N^* \end{Bmatrix}$

ดังนั้น ที่แถว n $\quad M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = p_n^*(t)$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{p_n^*}{M_n} \qquad \text{โดยที่} \qquad \omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n}$$

ระบบที่คิดความหน่วง

หากพิจารณาให้อัตราส่วนความหน่วงของ Mode ที่ n มีค่าเป็น ξ_n

$$\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{p_n^*}{M_n}$$

วิเคราะห์หาคำตอบ $q_n(t)$ โดยวิธีเดียวกับระบบ SDOF

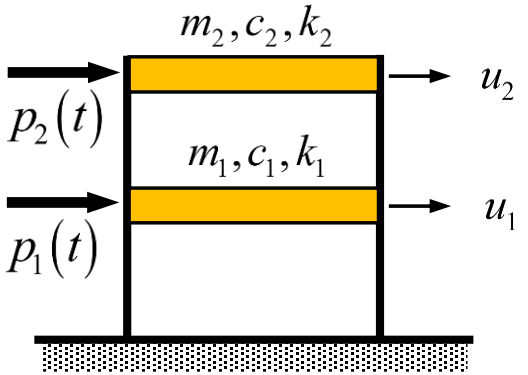
$$u_i(t) = \phi_{i1}q_1(t) + \phi_{i2}q_2(t) + \cdots + \phi_{iN}q_N(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi q}(t)$$

วิธี Modal Analysis หรือ Modal Superposition (วิธีรวมโหมด)

ตัวอย่าง

จากตัวอย่าง ให้อาคารมีค่าอัตราส่วน
ความหน่วงทุกโหมดเท่ากับ 0.02



ก) จงหาผลตอบสนองของแต่ละชั้นของอาคารที่เวลา $t = 2\pi/\omega_1$ เนื่องจากการสั่นอิสระ ด้วยการกระจัดเริ่มต้น $u_1(0) = 0.5$ m และ $u_2(0) = -0.5$ m โดยไม่มีความเร็วตอนเริ่มต้น

<u>วิธีทำ</u> จาก $\omega_1 = 15.31$, $\omega_2 = 36.96$ rad/sec

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.414 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} -2.414 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$M_1 = \boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_1 = 58.58 \times 10^3 \quad \text{kg}$$

$$M_2 = \boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_2 = 341.4 \times 10^3 \quad \text{kg}$$

หาค่าเริ่มต้นสำหรับ Generalized coordinate จาก

$$\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\varphi}_1 q_1(0) + \boldsymbol{\varphi}_2 q_2(0)$$

$$\begin{Bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.414 & -2.414 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.414q_1(0) - 2.414q_2(0) \\ q_1(0) + q_2(0) \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $q_1(0) = -0.25, q_2(0) = -0.25$

และจาก $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$ ดังนั้น $\dot{q}_1(0) = 0, \dot{q}_2(0) = 0$

จาก การสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วง

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right]$$

สำหรับระบบที่ความหน่วงน้อย ๆ $\omega_D \approx \omega$



หา q_1, q_2 ได้ผลดังนี้

$$q_1(2\pi/\omega_1) \approx e^{-0.02\times 2\pi}\left[-0.25\cos(2\pi) - 0.25\times 0.02\sin(2\pi)\right]$$
$$= -0.2205$$

$$q_2(2\pi/\omega_1) \approx e^{-0.02\times 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}\left[-0.25\cos\left(2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - 0.25\times 0.02\sin\left(2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right]$$
$$= 0.1564$$

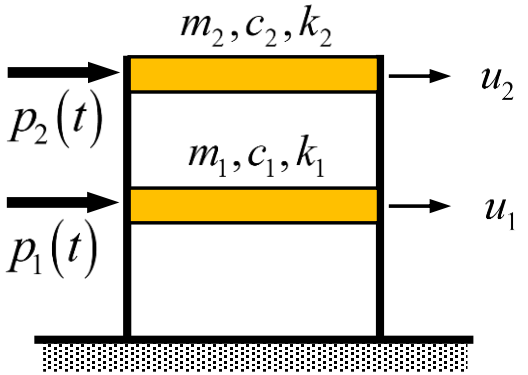
ดังนั้น ผลตอบสนองที่เวลา $t = 2\pi/\omega_1$ คือ

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.414 & -2.414 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.2205 \\ 0.1564 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.4690 \\ -0.0640 \end{Bmatrix} \text{ m}$$



ตัวอย่าง

จากตัวอย่าง ให้อาคารมีค่าอัตราส่วนความหน่วงทุกโหมดเท่ากับ 0.02



ข) จงหาผลตอบสนองแบบสภาวะคงตัว (Steady state response)

ภายใต้แรงกระทำ $p_1(t) = 0$ และ $p_2(t) = 0.1\sin\left(1.1\omega_1 t\right)$ MN

<u>วิธีทำ</u> แรงเชิงโหมดคือ $\mathbf{p}^* = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}$

$$\begin{Bmatrix} p_1^*(t) \\ p_2^*(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.414 & 1 \\ -2.414 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1\sin\bar{\omega}t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1\sin\bar{\omega}t \\ 0.1\sin\bar{\omega}t \end{Bmatrix} \text{ MN}$$

ผลตอบสนองแบบสภาวะคงตัวหาได้จาก

$$u_p(t) = \rho\sin\left(\bar{\omega}t - \phi\right)$$

$$\rho = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

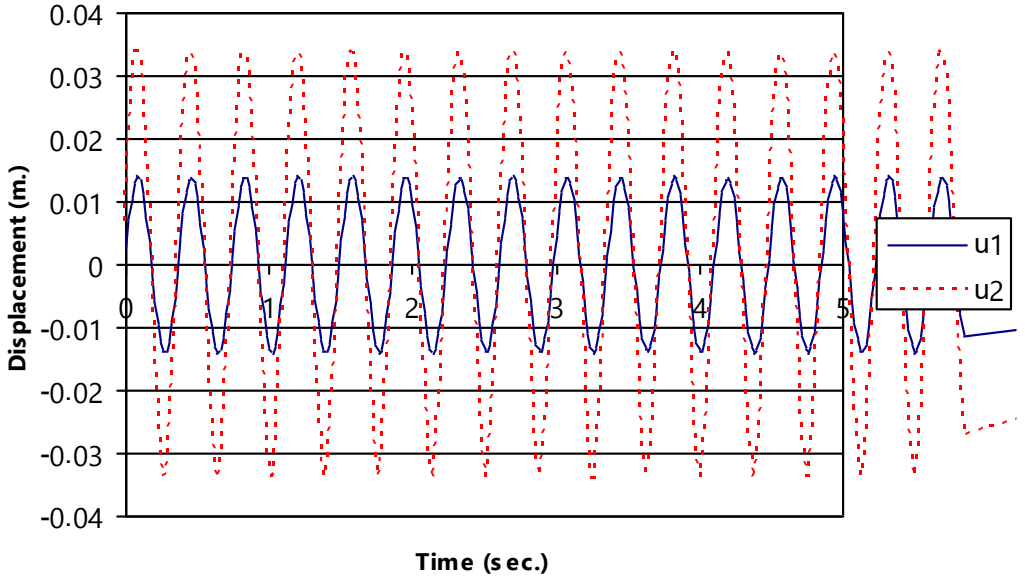
ได้ผลดังนี้ $$q_1(t) = 0.03396\sin[16.84t + 0.206]$$

$$q_2(t) = 0.000271\sin[16.84t - 0.0230]$$

ผลตอบสนองแบบสภาวะคงตัวของแต่ละชั้นแสดงได้เป็นสมการและกราฟได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.414 & -2.414 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.406\times10^{-2}\sin[16.84t + 0.206] - 6.53\times10^{-4}\sin[16.84t - 0.0230] \\ 3.396\times10^{-2}\sin[16.84t + 0.206] + 2.71\times10^{-4}\sin[16.84t - 0.0230] \end{Bmatrix} \text{ m}$$

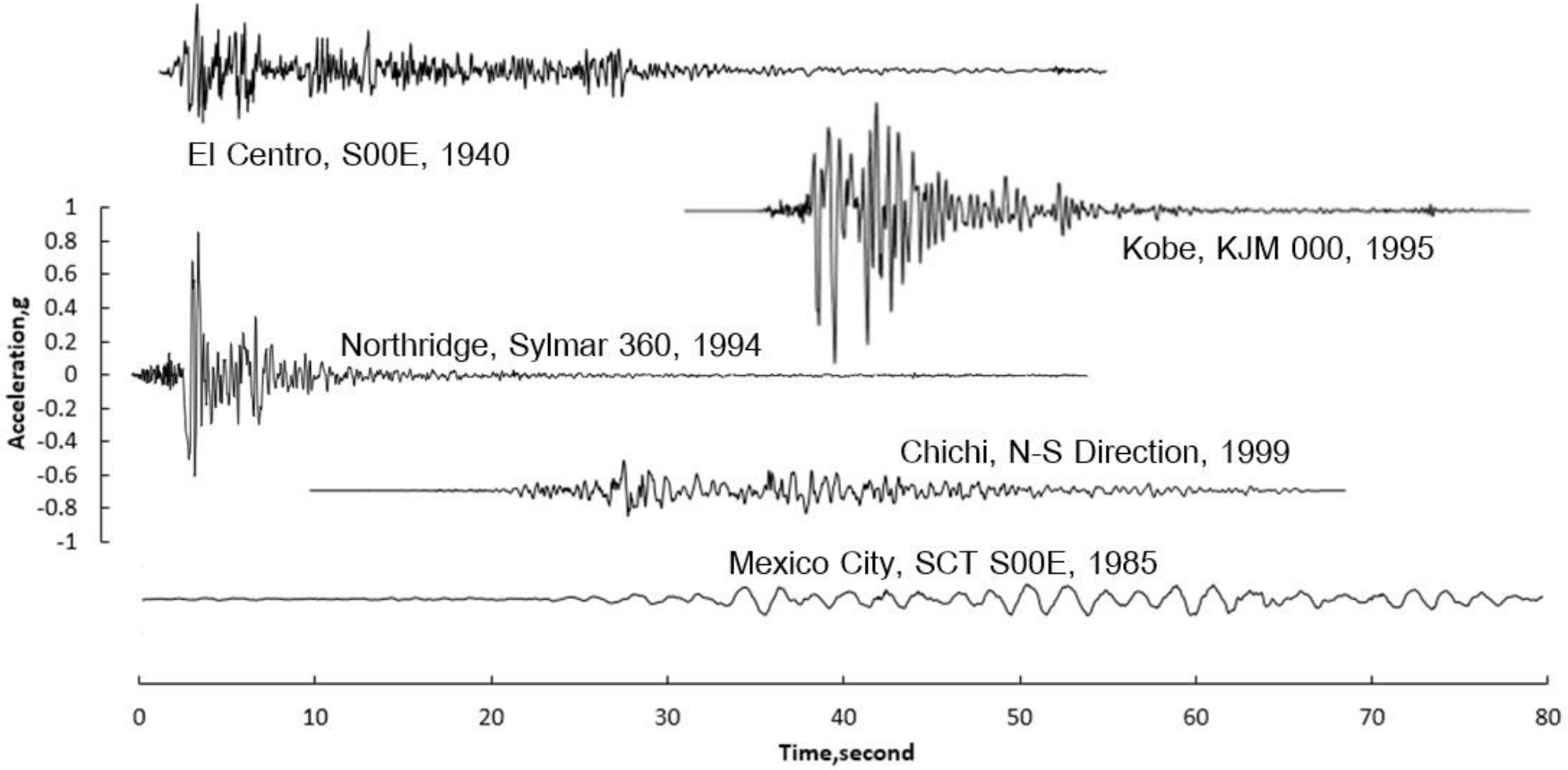


การตอบสนองเนื่องจากแผ่นดินไหว

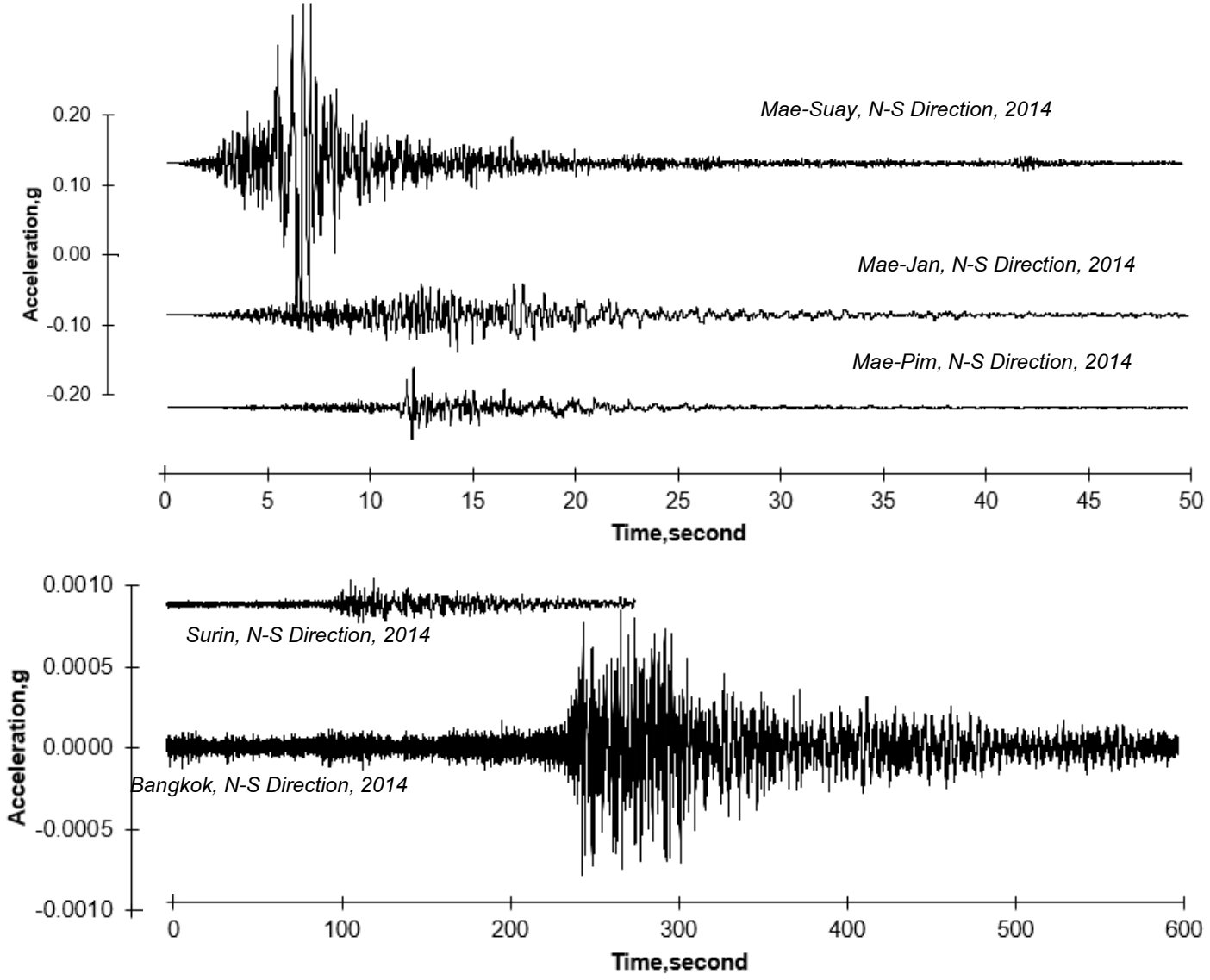
(Earthquake Response of Linear/Nonlinear System)



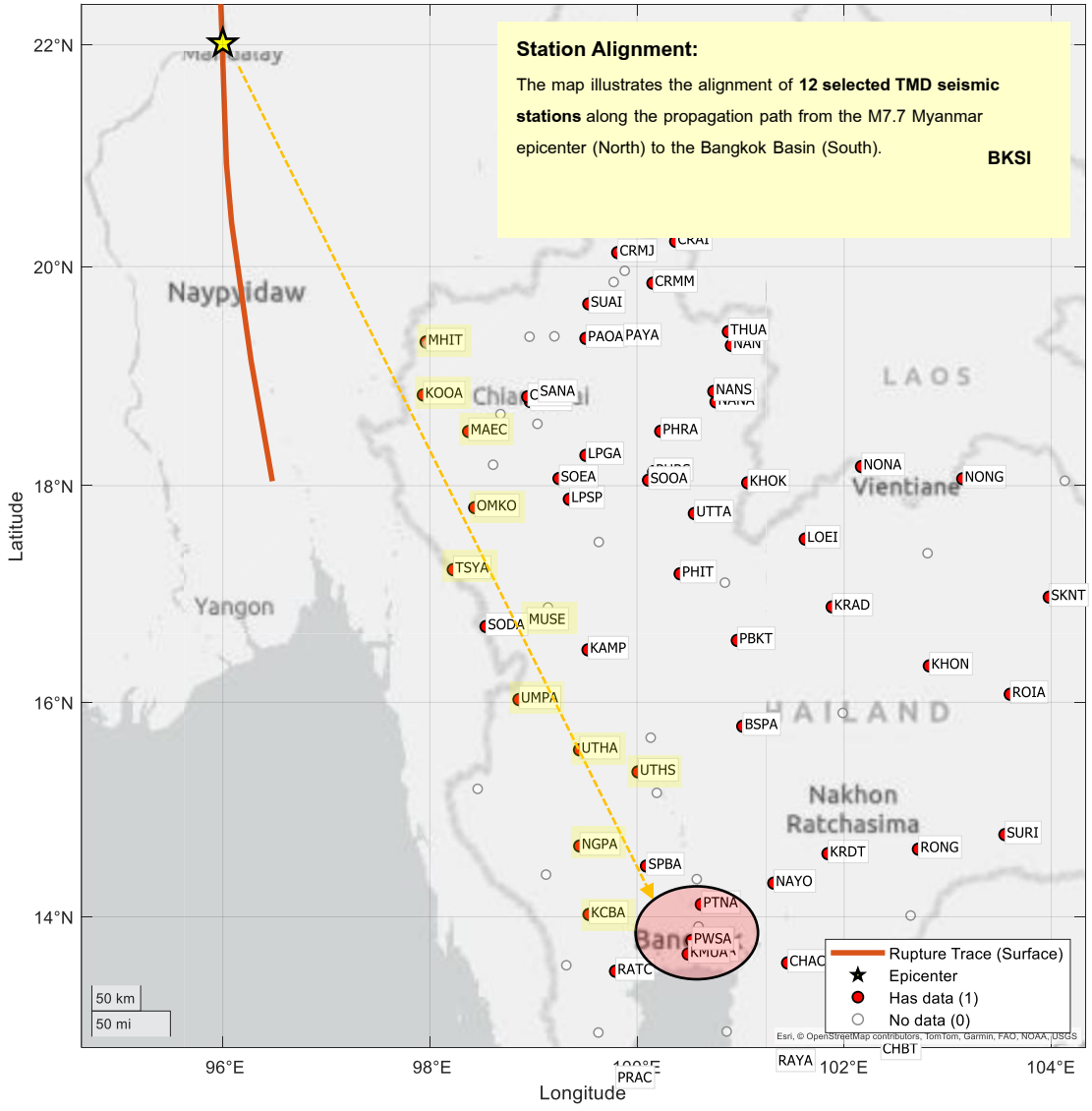
ตัวอย่างของความเร่งของพื้นเนื่องจากแผ่นดินไหว $\ddot{u}_g$

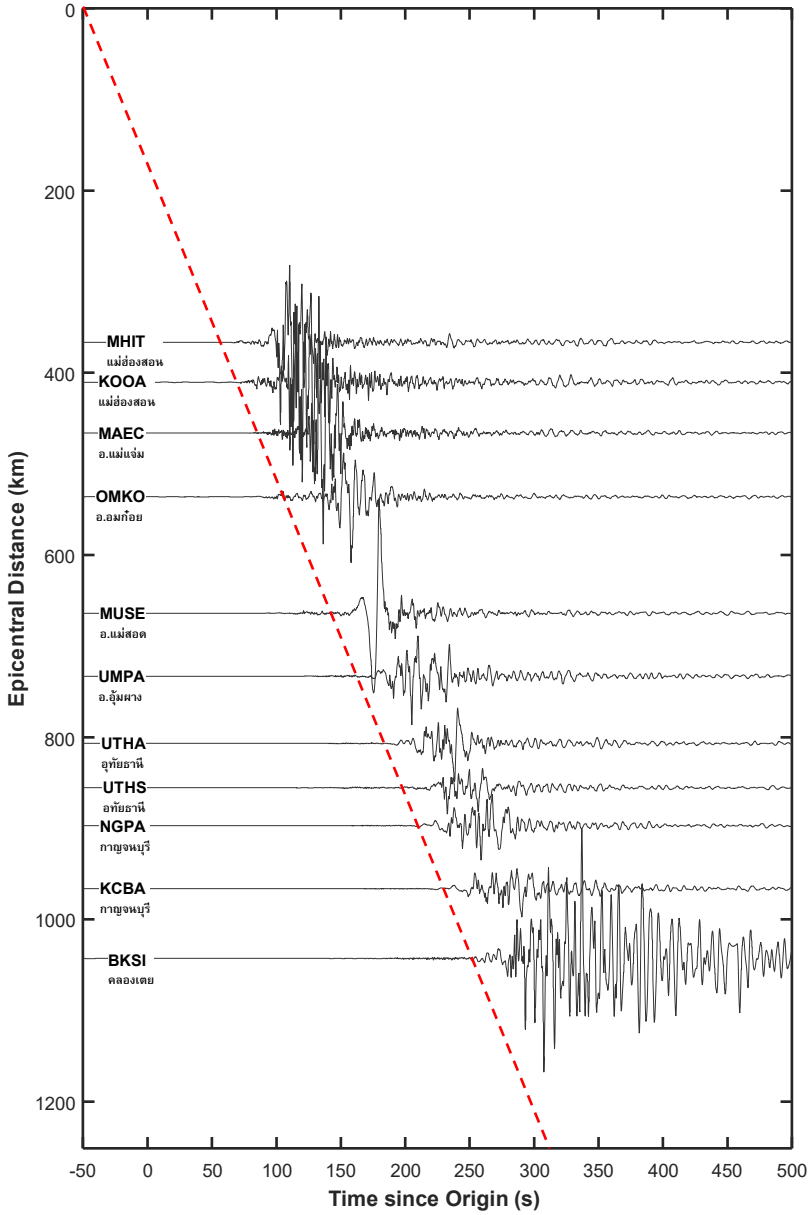


ตัวอย่างของความเร่งของพื้นเนื่องจากแผ่นดินไหว $\ddot{u}_g$



Wave Propagation: 28 March 2025





ความแตกต่างระหว่าง Magnitude และ Intensity ของแผ่นดินไหว



📌 Magnitude (ขนาดแผ่นดินไหว)

- วัดพลังงานที่ปลดปล่อยจากจุดศูนย์กลางแผ่นดินไหว
- เป็นค่าคงที่ ไม่ขึ้นกับตำแหน่งที่วัด
- หน่วยวัด: Richter Scale, Magnitude Mw

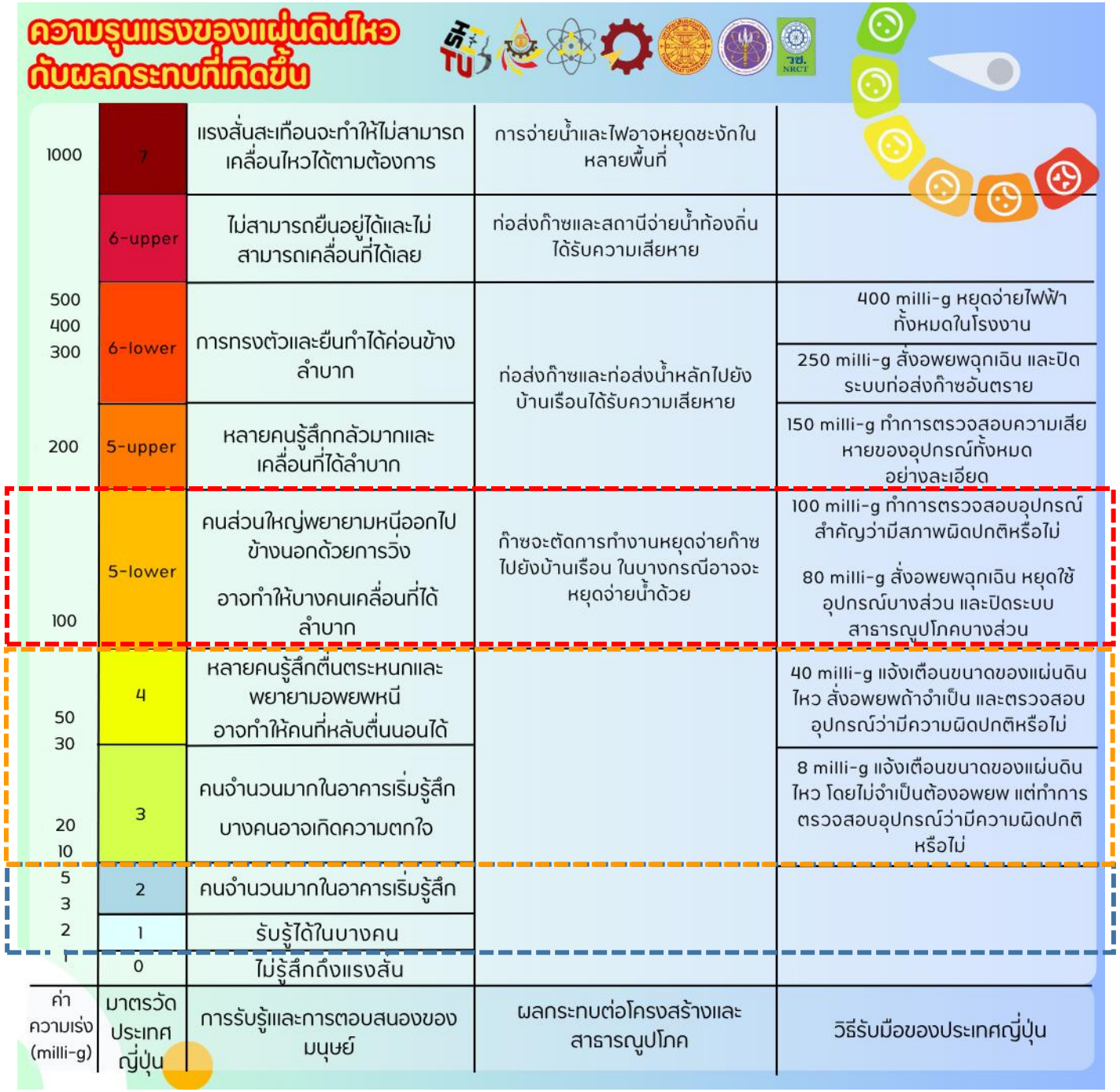
💡 เหมือน “พลังระเบิด” ของแผ่นดินไหว



📌 Intensity (ความรุนแรงที่รับรู้)

- วัดผลกระทบในแต่ละพื้นที่
- ขึ้นกับระยะทางและสภาพพื้นที่
- หน่วยวัด: Modified Mercalli Intensity (MMI), Japan Meteorological Agency (JMA) อัตราเร่งของพื้นดิน)

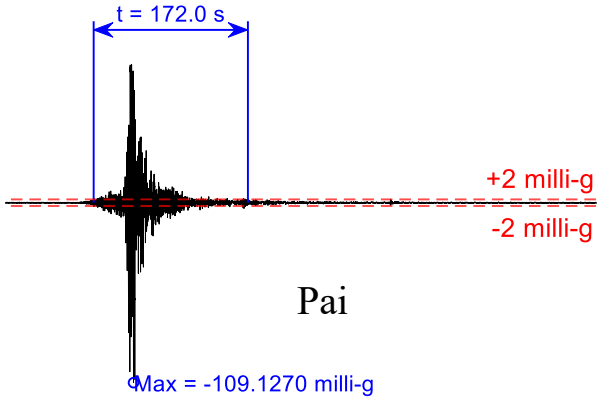
💡 เหมือน “ความสั่นไหวที่รู้สึกได้” ณ จุดที่เราอยู่



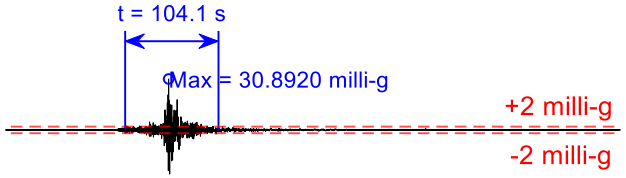
$g = 9.81\ m/s^2$

milli-g = g/1000

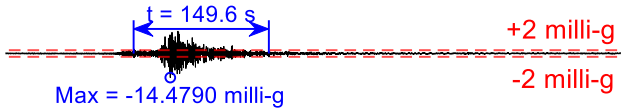
ค่าอัตราเร่งบนพื้นดิน



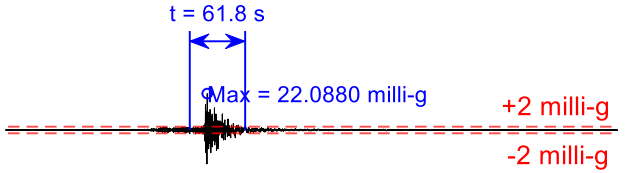
Pai



Chiang Mai



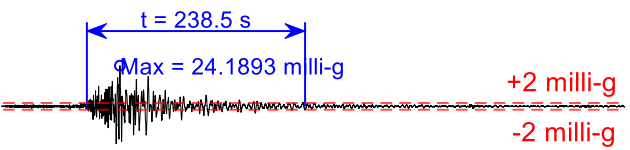
Chiang Rai



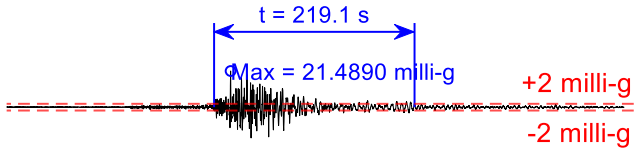
Sukhothai

พื้นดิน กทม.

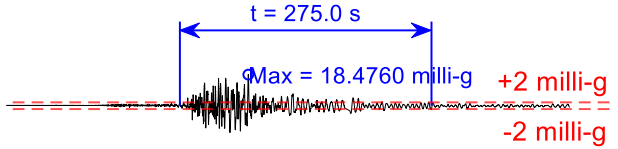
(TMD station)



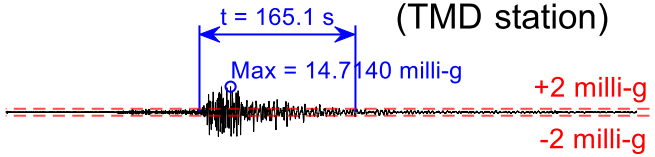
PWSA



KMUA

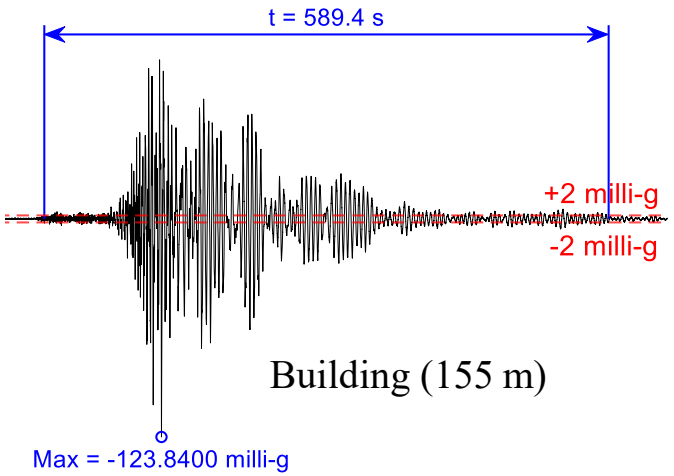


BKSI

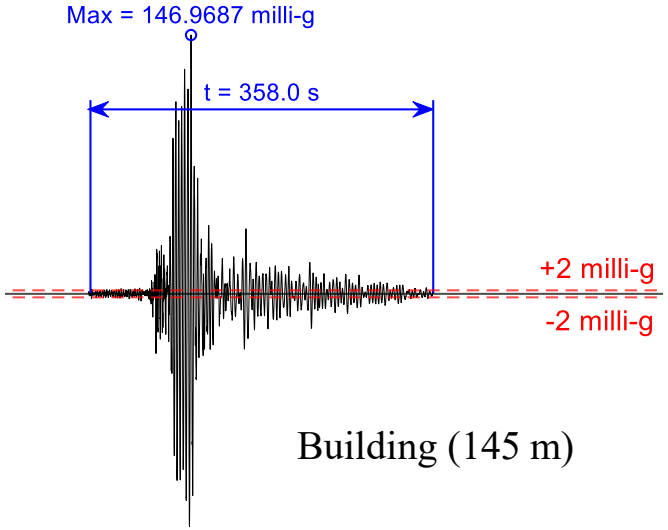


PTNA

อาคารสูง กทม.

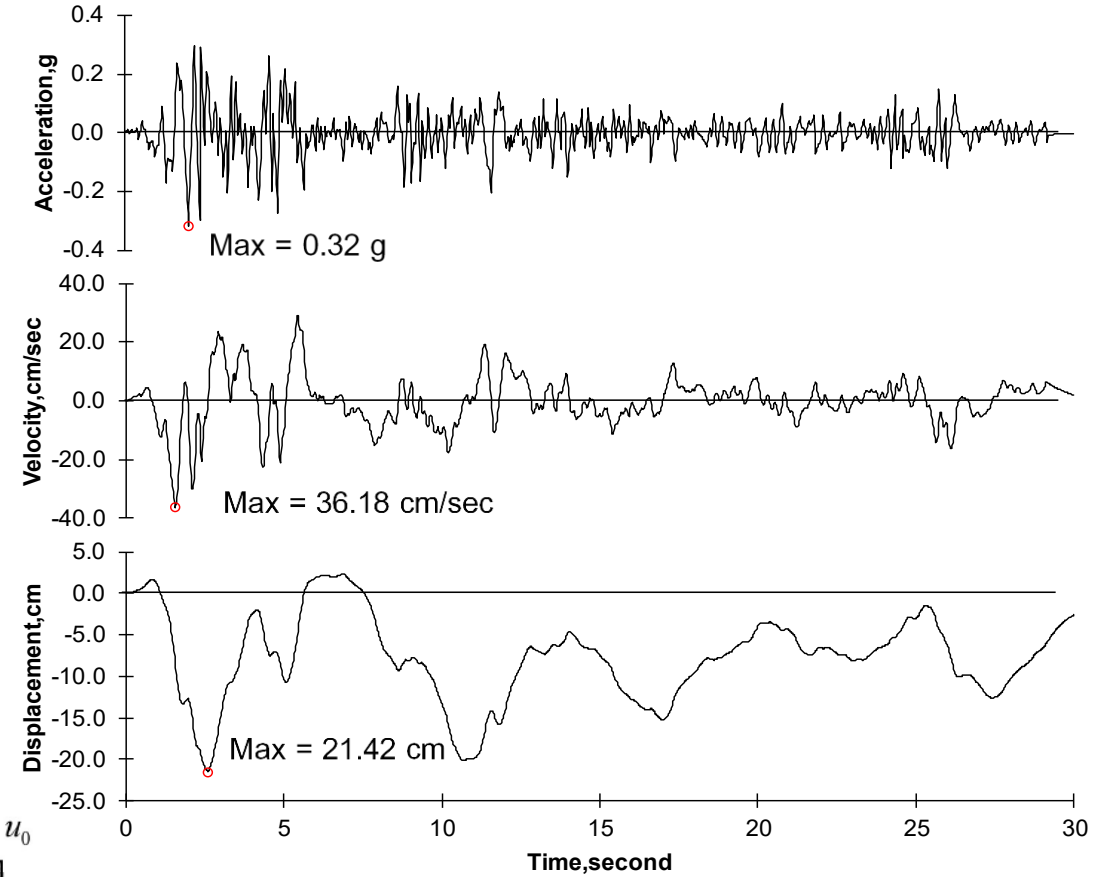


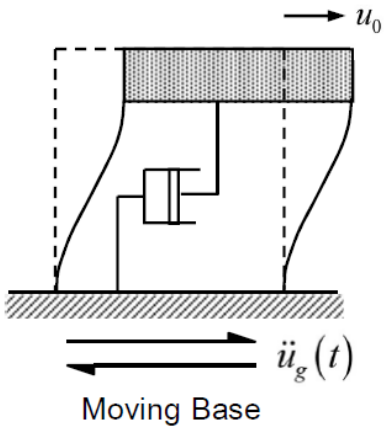
Building (155 m)



Building (145 m)

ลักษณะของคลื่นแผ่นดินไหว El Centro



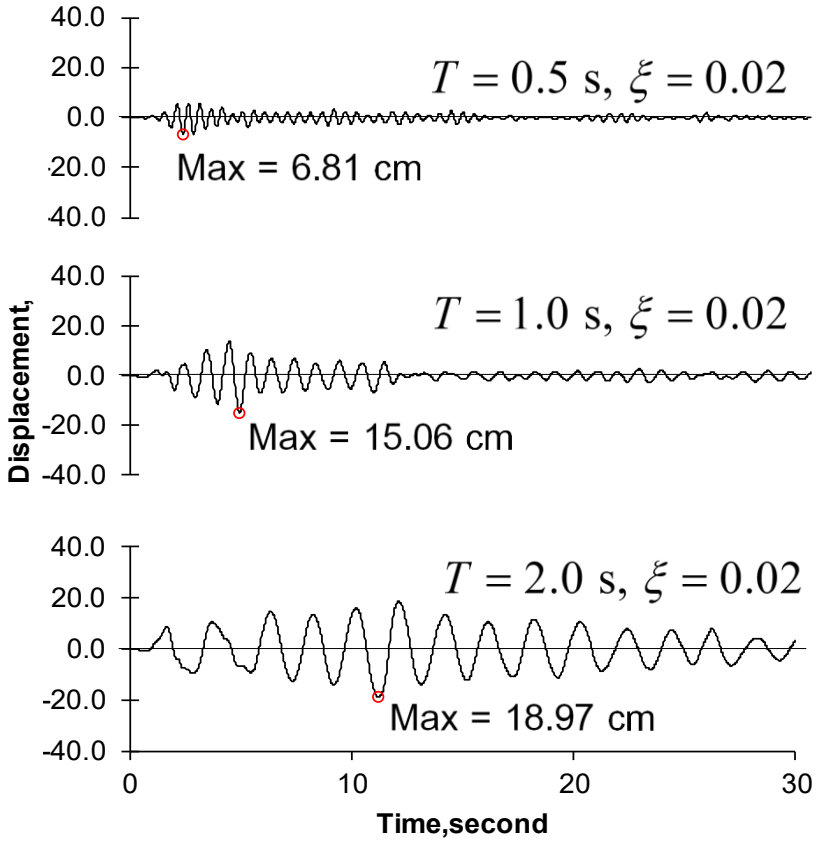


Equation of Motion $\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g(t)$

$\omega\,(\text{or } T), \xi$ **Important Parameters of Structures**

การกระจัดของระบบตัวอย่างต่อคลื่นแผ่นดินไหว El Centro

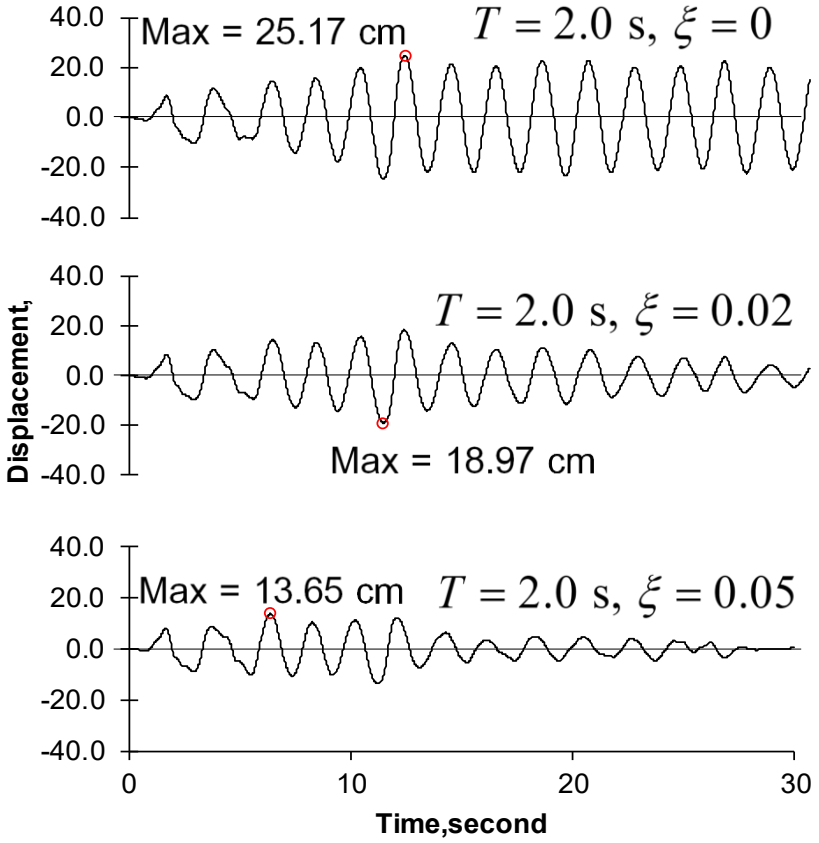
ระบบมีค่า T ต่างกัน และค่า ξ เท่ากัน



- คาบของการสั่นมีค่าใกล้เคียงกับค่าคาบธรรมชาติ
- ระบบที่มีคาบธรรมชาติยาว มีค่าการกระจัดสูงขึ้น

(แต่อาจไม่เป็นจริงในทุกกรณี)

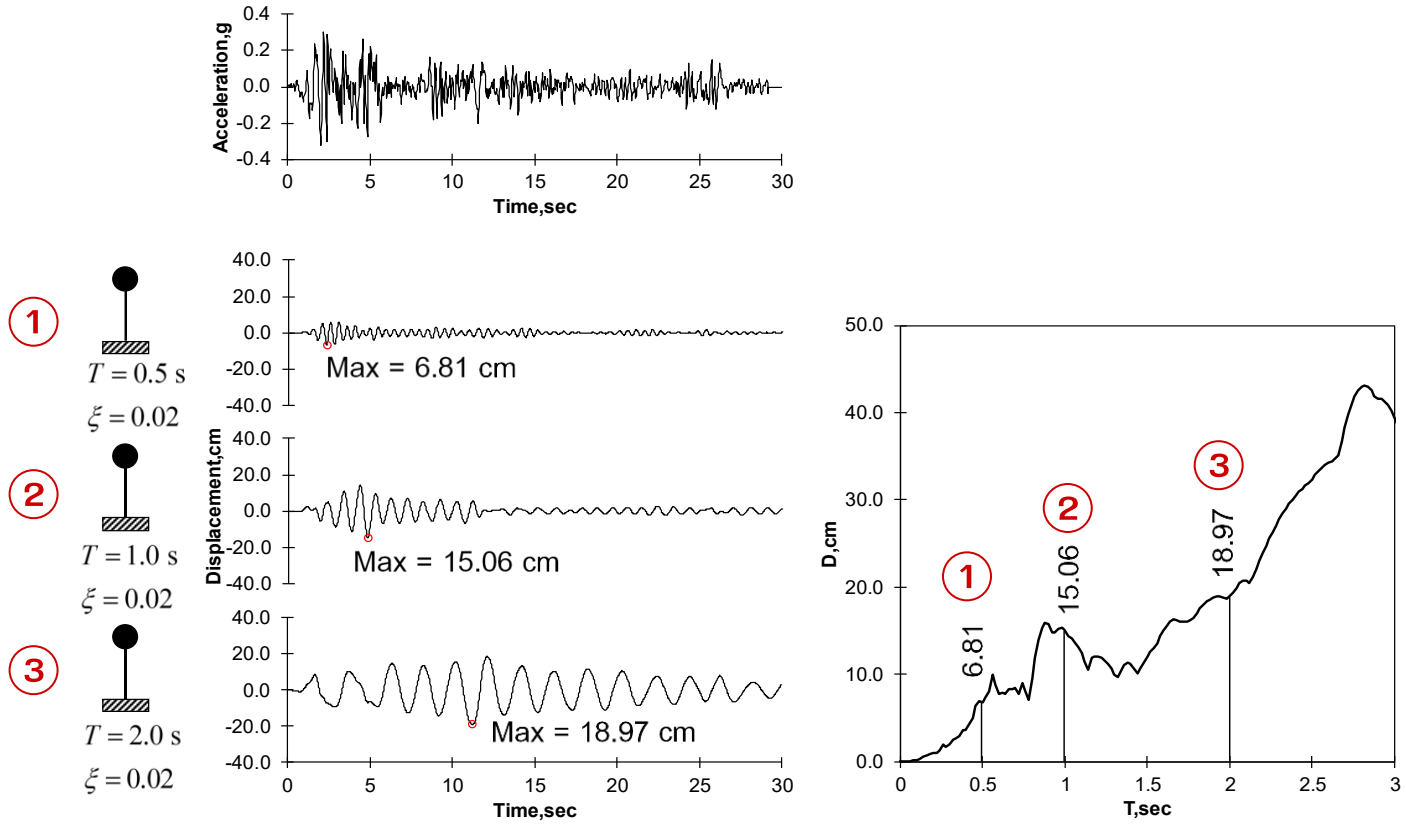
ระบบมีค่า T เท่ากัน และค่า ξ ต่างกัน



- ค่าการกระจัดสูงสุดของแต่ละกรณีจะมีค่าลดลง เมื่อเพิ่มค่า ξ ให้กับระบบ

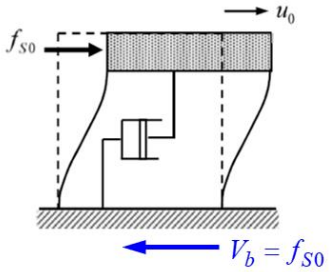
Response Spectrum Concept

Response Spectrum คือ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าสูงสุดของการตอบสนองต่อแรงเนื่องจากแผ่นดินไหว กับคาบธรรมชาติของระบบนั้น โดยพิจารณาที่ค่าอัตราส่วนความหน่วงที่คงที่ค่าหนึ่ง



สเปคตรัมผลตอบสนองเสมือน (Pseudo Response Spectral)

$u_0 = D =$ ค่าสูงสุดของระยะกระจัดสำหรับระบบใดๆ



แรงแผ่นดินไหวสูงสุด

$$f_{S0} = ku_0 = kD$$

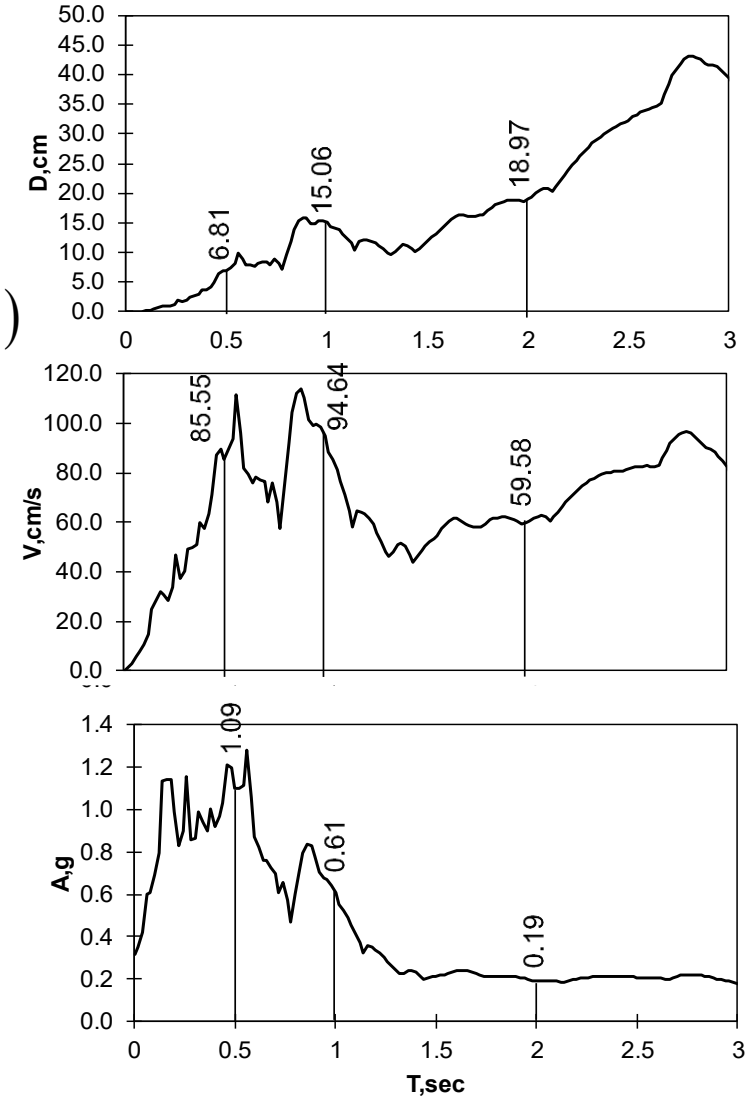
$$u = u_0 \sin(\omega t), v = \omega u_0 \cos(\omega t), a = -\omega^2 u_0 \sin(\omega t)$$

นิยาม

Pseudo-velocity $V = \omega D$

Pseudo-acceleration $A = \omega^2 D$

จาก $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad k = \omega^2 m$ $\boxed{f_{S0} = m\omega^2 D = mA}$

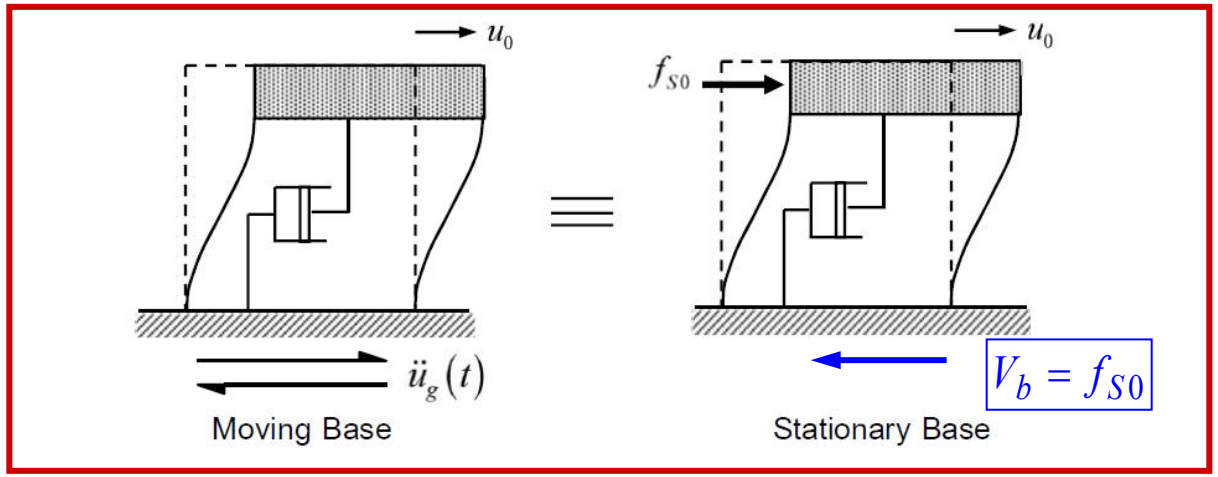


แรงสถิตเทียบเท่า (Equivalent Static Force)

D คือค่าสูงสุดของระยะกระจัดสำหรับระบบ

V ใช้ในการหาค่าพลังงานสูงสุดจากการสั่นไหวที่สะสมภายในระบบ

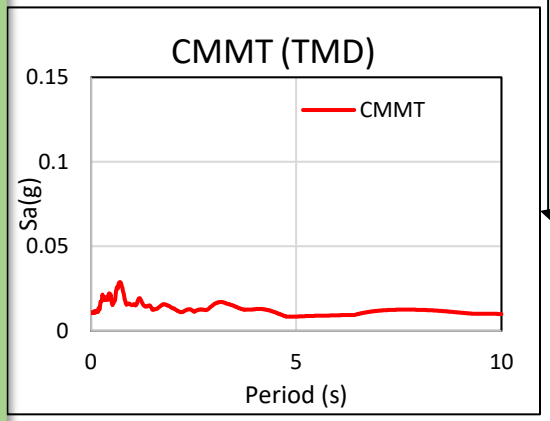
A ใช้ในการหาค่าสูงสุดของแรงสถิตเทียบเท่าและแรงเฉือนที่ฐาน

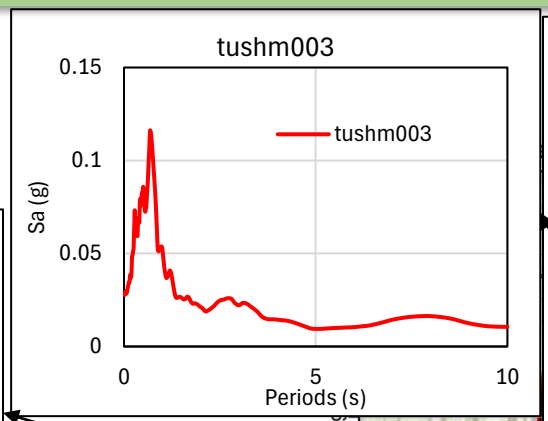


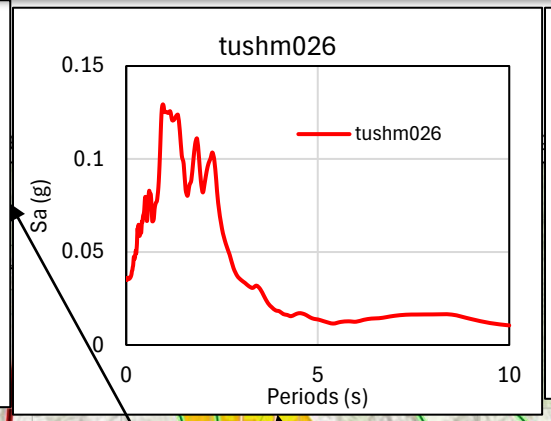
Base Shear $V_b = f_{S0} = mA = \frac{A}{g}W$

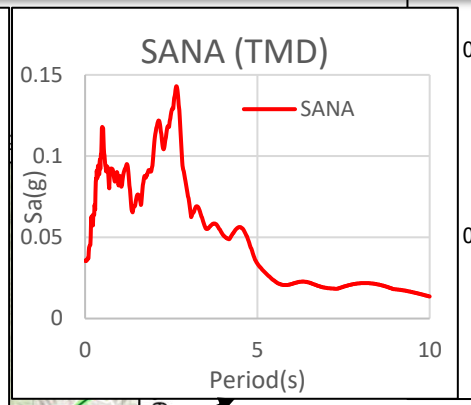
$\frac{A}{g} \equiv$ **Base Shear Coefficient** $W =$ **Weight**

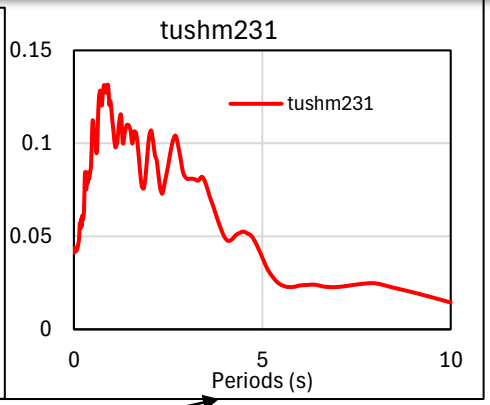
Chiang Mai Basin
28 March 2025

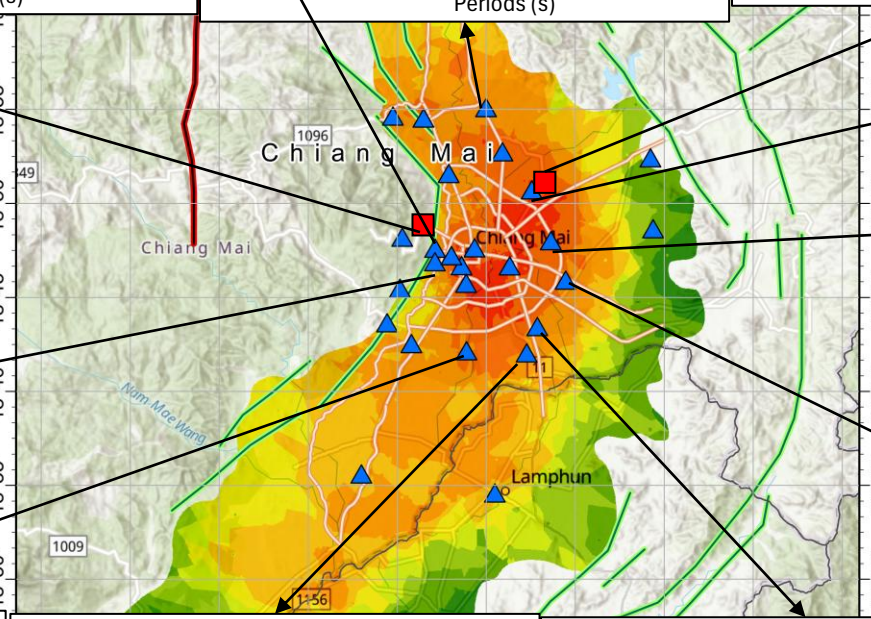


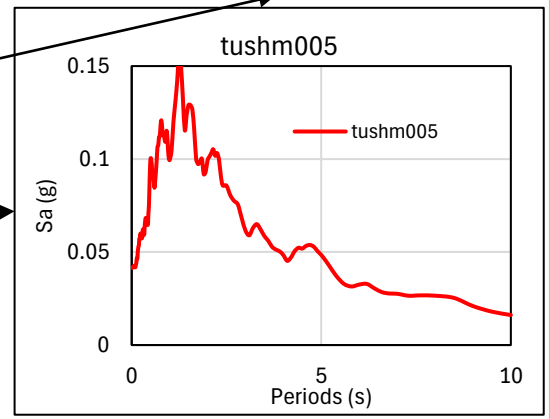


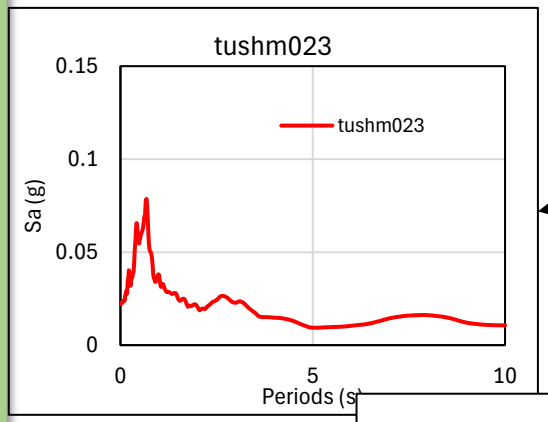


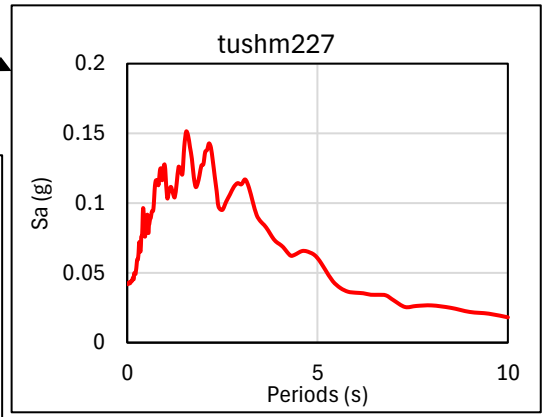


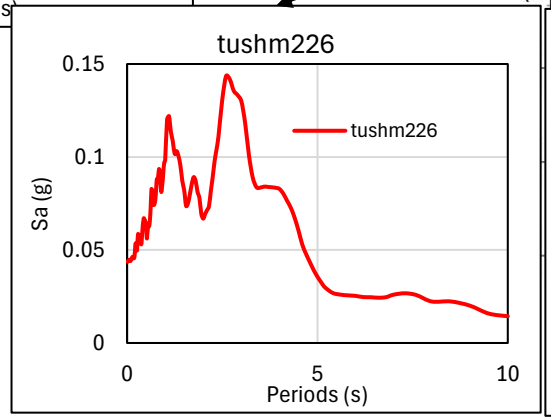


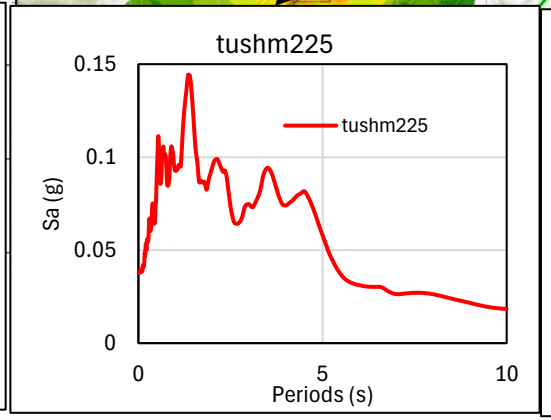


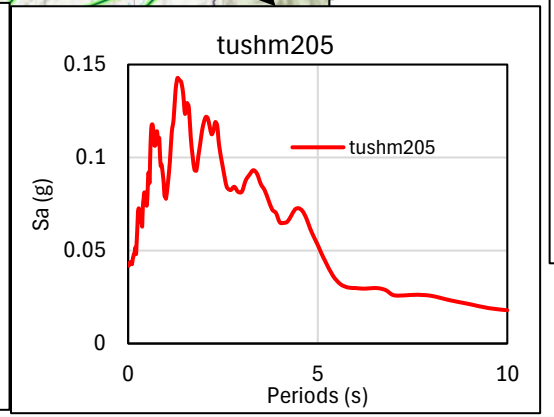






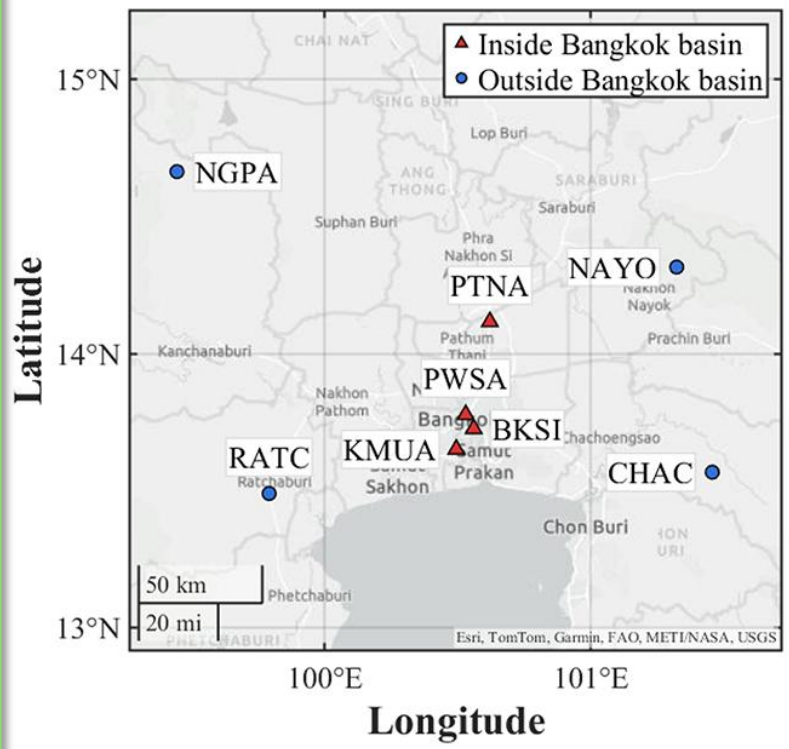


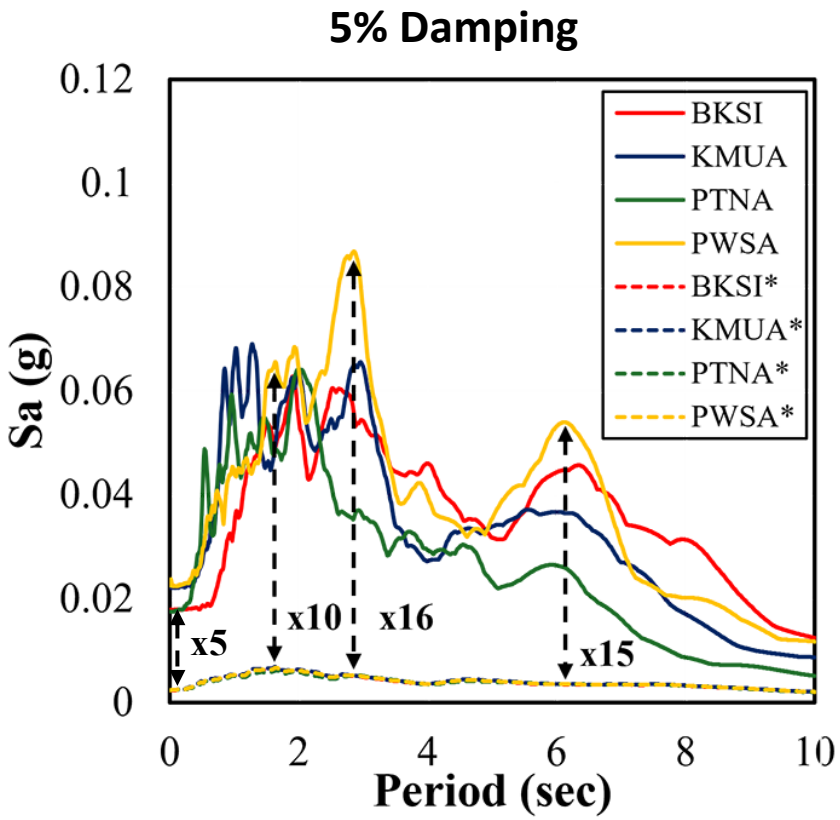


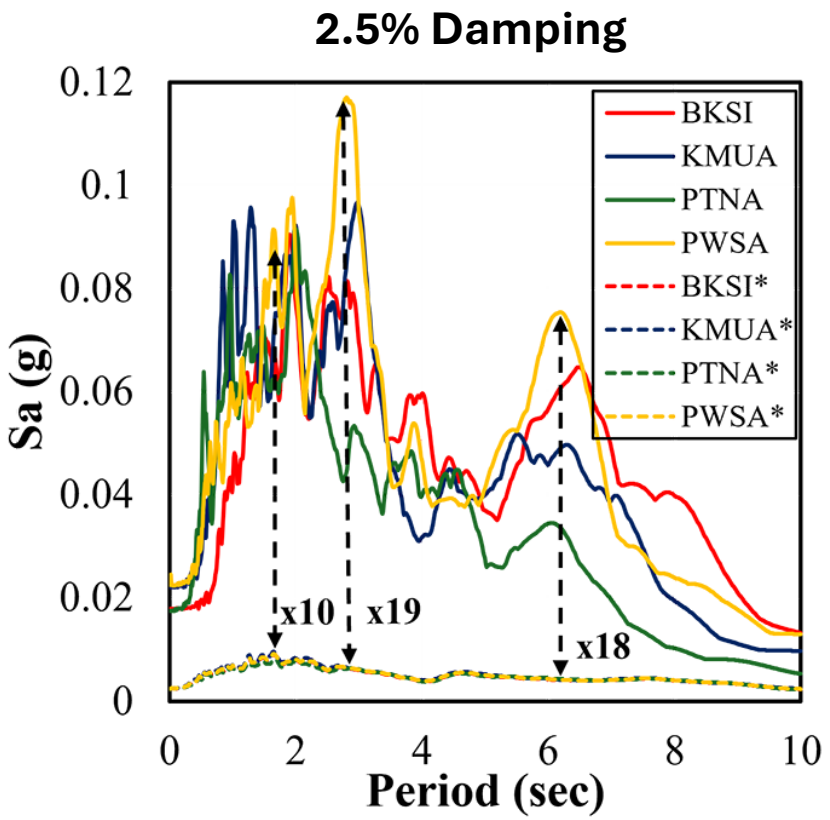


EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

Spectral Acceleration: Bangkok Basin Amplification

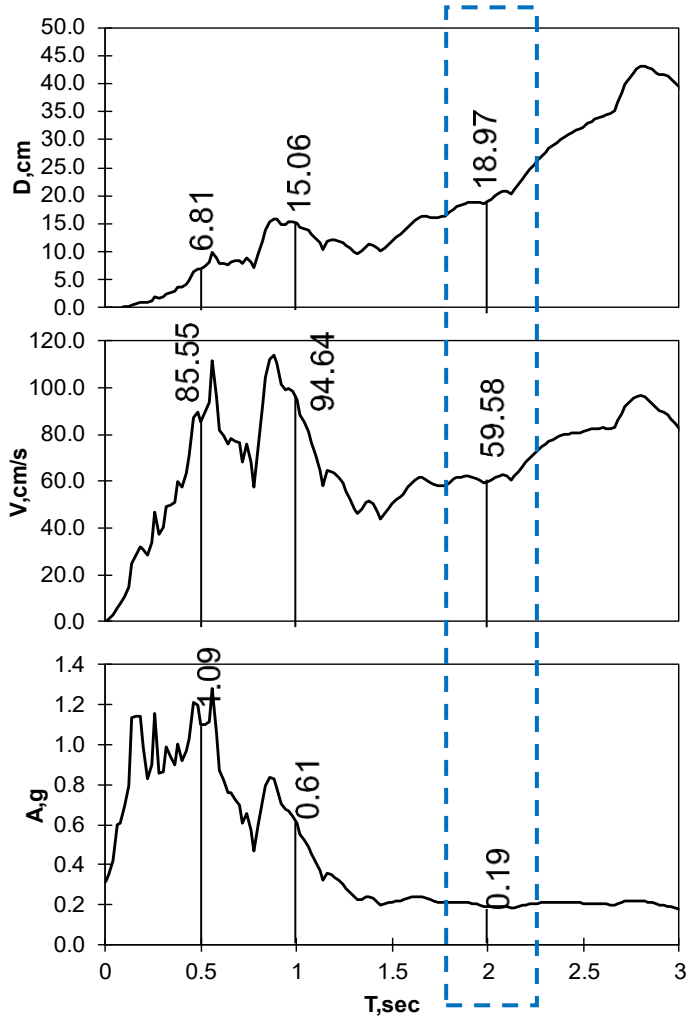


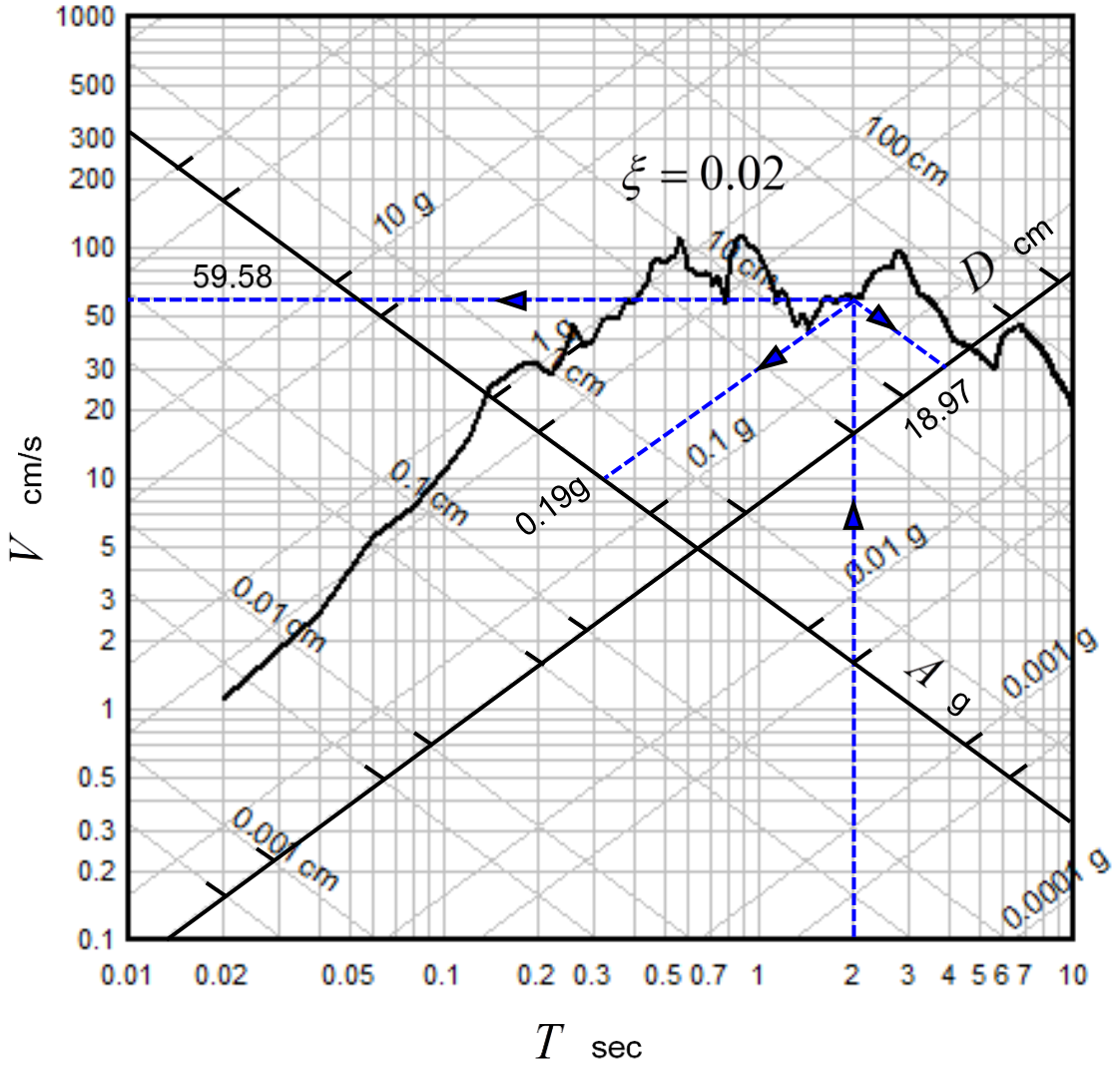




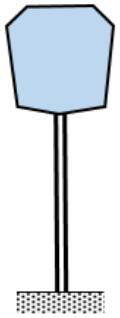
EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

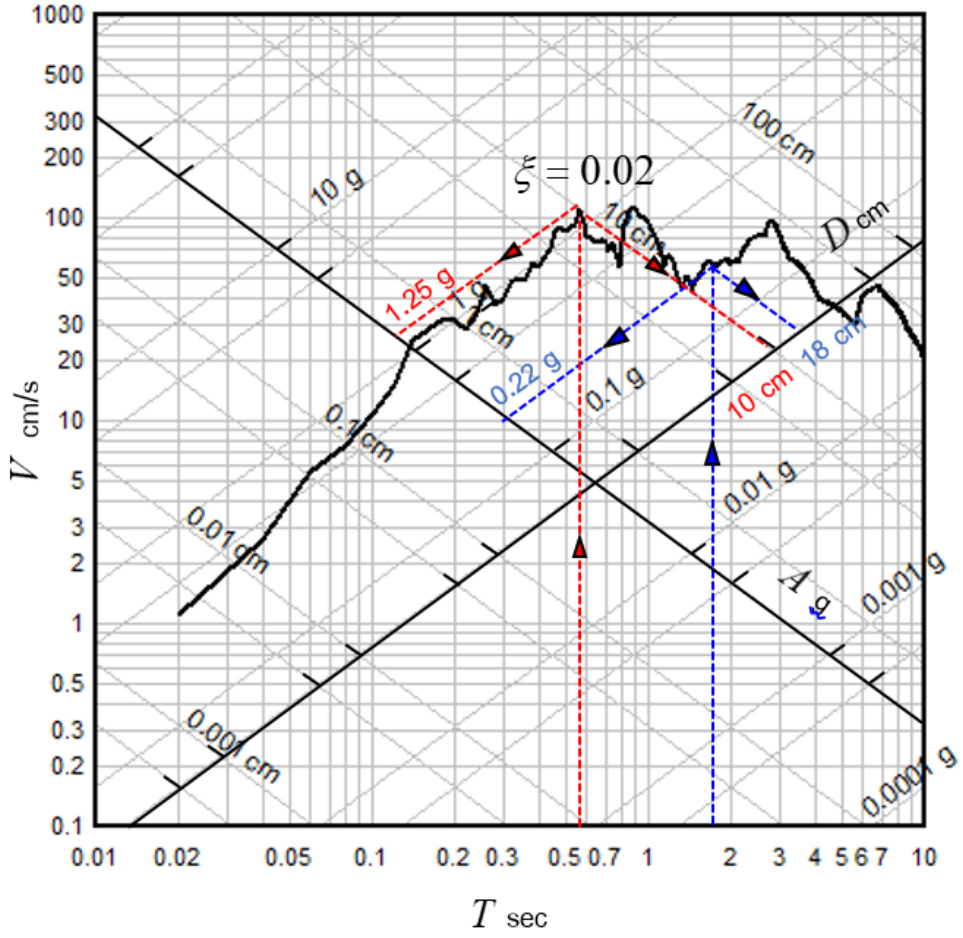
สเปกตรัมผลตอบสนองรวม *D-V-A*





ตัวอย่าง ถังน้ำที่มีน้ำหนัก 23 kN เสาที่รองรับสูง 4.0 m เป็นท่อเหล็กมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกเท่ากับ 114 mm. หนา 6 mm. $E = 200 \times 10^9$ N/m^2 เสามีน้ำหนักเท่ากับ 150 kg/m และสมมุติให้อัตราส่วนความหน่วงคือ 0.02 ให้คำนวณค่าการกระจัดสูงสุด (Peak Deformation) และหน่วยแรงดัด ที่เกิดจากแผ่นดินไหว El Centro





วิธีทำ จำลองให้เป็นระบบ SDOF ที่มีคุณสมบัติดังนี้

I ของหน้าตัด $I = \frac{\pi}{64}\left(0.114^4 - 0.102^4\right) = 2.98\times10^{-6}\ \text{m}^4$

สติฟเนส $k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3\times200\times10^9\times2.98\times10^{-6}}{4^3} = 27{,}900$ N/m

น้ำหนักเสา $150\times4 = 600 << 23{,}000$ N ดังนั้น ไม่คิดน้ำหนักเสา

มวลของระบบ $m = \frac{W}{g} = \frac{23{,}000}{9.81} = 2{,}345$ kg

ความถี่ธรรมชาติ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{27{,}900}{2{,}345}} = 3.45$ rad/sec

คาบธรรมชาติ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.82$ sec

จาก Response Spectrum สำหรับโครงสร้างที่มี $\xi = 0.02$ ภายใต้แผ่นดินไหว El Centro

ค่าสูงสุดของการกระจัด (Peak deformation) $u_0 = D = 0.18$ m

และค่าความเร่ง $A = 0.22$ g

ค่าสูงสุดของแรงสถิตเทียบเท่า f_{S0} = 0.22 x 23,000 = 5,060 N

ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัด $M_{\max}$ = 5,060 x 4 = 20,240 N-m

ค่าสูงสุดของหน่วยแรงดัด $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}\times c}{I} = \frac{20{,}240\times(0.114/2)}{2.98\times10^{-6}}$ = 387 x 10^6 N/m^2



ตัวอย่าง หากผลการคำนวณในตัวอย่างก่อน พบว่าหน่วยแรงดัดที่เกิดขึ้นมีค่าเกินค่าที่ยอมให้ ผู้ออกแบบจึงทำการขยายขนาดหน้าตัดเสาเป็นท่อเหล็กมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกเท่ากับ 220 mm. หนา 8.2 mm. โดยมีคุณสมบัติอื่น ๆ ของระบบเหมือนเดิม ให้ตรวจสอบโครงสร้างอีกครั้ง

วิธีทำ

I ของหน้าตัด $I = 3.064 \times 10^{-5}\ m^4$

สติฟเนส $k = 287{,}300$ N/m

ความถี่ธรรมชาติ $\omega = 11.07$ rad/sec

คาบธรรมชาติ $T = 0.568$ sec

จาก Response Spectrum สำหรับโครงสร้างที่มี $\xi = 0.02$ ภายใต้แผ่นดินไหว El Centro

ค่าสูงสุดของการกระจัด (Peak deformation) $u_0 = D = 0.10$ m

และค่าความเร่ง $A = 1.25$ g

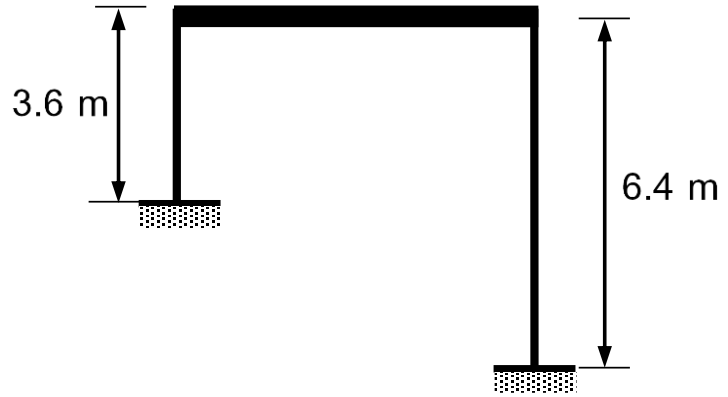
ค่าสูงสุดของแรงสถิตเทียบเท่า $f_{S0} = 1.25 \times 23{,}000 = 28{,}750$ N

ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัด $M_{max} = 28{,}750 \times 4 = 115{,}000$ N-m

ค่าสูงสุดของหน่วยแรงดัด $\sigma_{max} = \dfrac{115{,}000 \times (0.22/2)}{3.064 \times 10^{-5}} = 413 \times 10^6$ N/m^2

จากตัวอย่างนี้ การเพิ่มขนาดเสาทำให้การกระจัดของระบบลดลงได้ แต่ทำให้เกิดแรงในเสามากขึ้นและหน่วยแรงดัดก็มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย การเพิ่มขนาดเสาจึงไม่ใช่วิธีที่เหมาะสำหรับปัญหานี้

ตัวอย่าง พิจารณาโครงข้อแข็งดังรูป ประกอบด้วยเสาที่มีขนาด 0.25 m. x 0.25 m. E = 20,000 MPa คานมีความแข็งแกร่งสูง และมีมวลเท่ากับ 4,500 kg. สมมุติให้อัตราส่วนความหน่วงเท่ากับ 0.02 จงคำนวณแรงเฉือนที่เกิดขึ้นกับเสาทั้งสอง ที่เกิดจากแผ่นดินไหว El Centro



วิธีทำ

สติฟเนส $k = \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_2^3}$

$= 12 \times 20000 \times 10^6 \times \left(0.25^4/12\right) \times \left(\frac{1}{3.6^3} + \frac{1}{6.4^3}\right)$

$= \left(1.674 + 0.298\right) \times 10^6 = 1.972 \times 10^6$ N/m

คาบธรรมชาติ $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 0.30$ sec

จาก Response Spectrum สำหรับโครงสร้างที่มี $\xi = 0.02$ ภายใต้แผ่นดินไหว El Centro

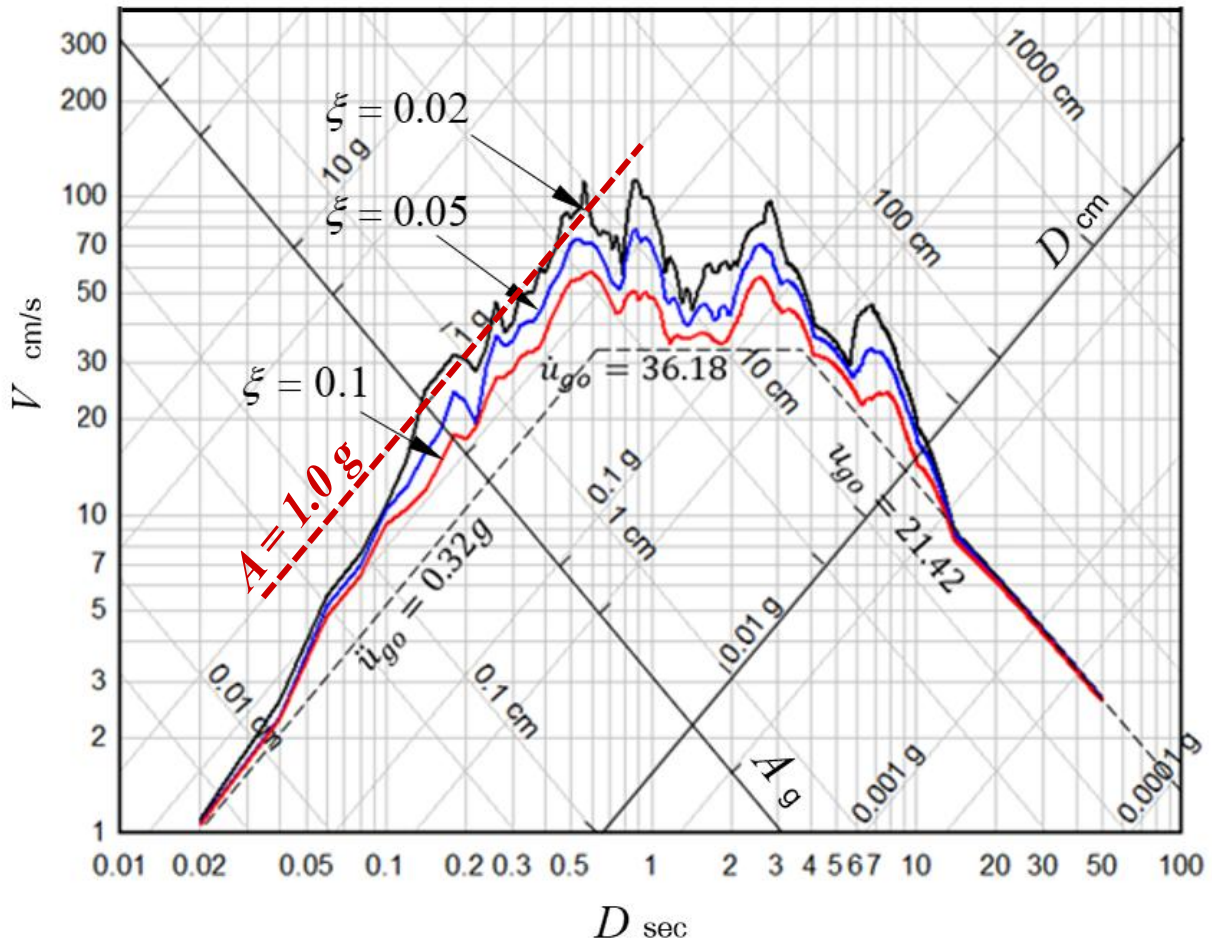
ค่าสูงสุดของการกระจัด (Peak deformation) $u_0 = D = 2.0$ cm และค่าความเร่ง $A = 0.9$ g

แรงเฉือนที่เสาต้นสั้น $V_{short} = 1.674 \times 10^6 \times 0.02 = 33,480$ N

แรงเฉือนที่เสายาว $V_{long} = 0.298 \times 10^6 \times 0.02 = 5,960$ N

ควรระวัง ชิ้นส่วนที่มีสติฟเนสสูงจะรับแรงในสัดส่วนที่สูง

สเปกตรัมผลตอบสนองรวม *D-V-A*



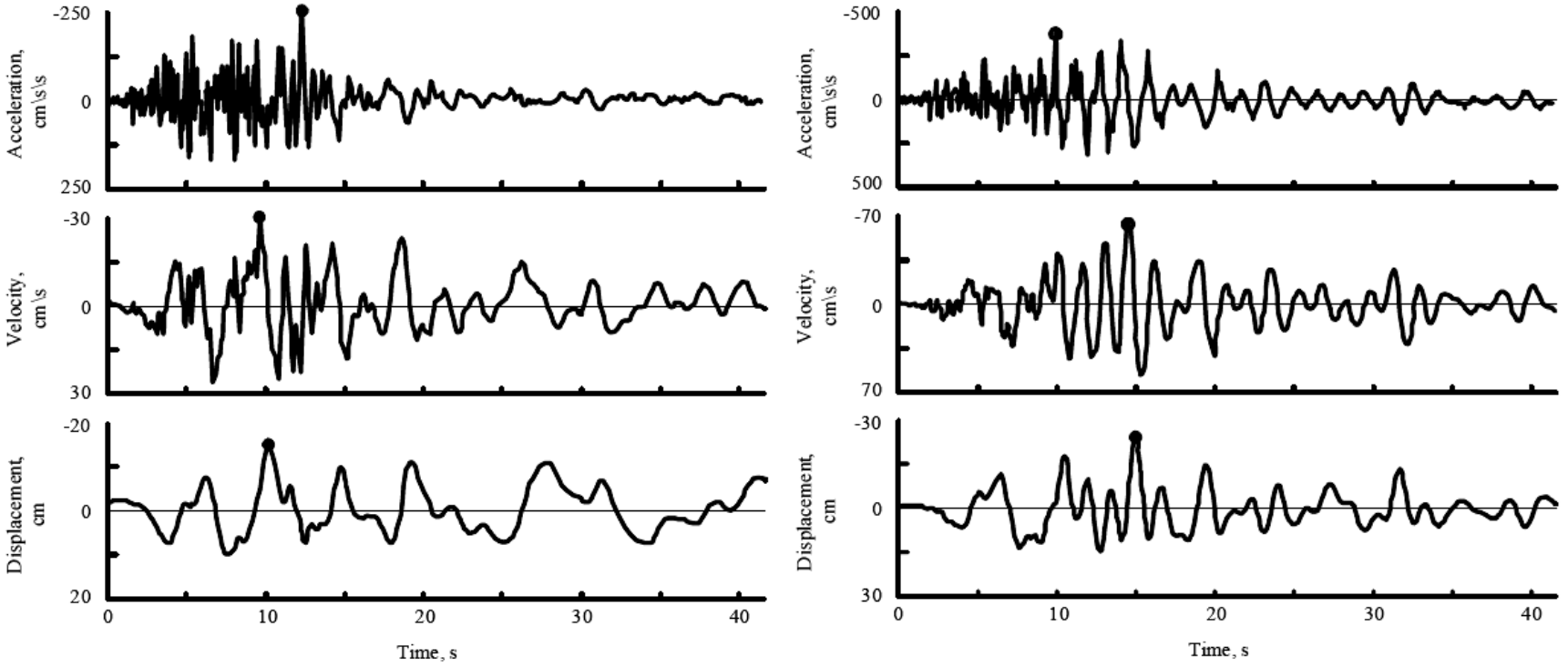
ผลตอบสนองอาจทำให้เกิดแรงประสิทธิผลมีค่ามากมหาศาล $V_b = mA$

การตอบสนองเนื่องจากแผ่นดินไหว

แผ่นดินไหว San Fernando ปี ค.ศ. 1971 ขนาด M 6.4

บันทึกแผ่นดินไหวที่พื้น

ผลตอบสนองของอาคารสูง 7 ชั้น



ผลตอบสนองอาจทำให้เกิดแรงประสิทธิผลมีค่ามากมหาศาล $V_b = mA$

หลักการออกแบบโครงสร้างต้านทานแผ่นดินไหว

- หากการออกแบบที่ต้องให้โครงสร้างต้านทานแรงมากขนาดนี้ได้โดยพฤติกรรมแบบอีลาสติกของโครงสร้างจะต้องการหน้าตัดของชิ้นส่วนขนาดใหญ่มาก
- หลักการออกแบบที่ใช้คือ ยอมให้โครงสร้างบางส่วนเกิดการวิบัติจากการครากของหน้าตัดเพื่อให้โครงสร้างมีพฤติกรรมแบบอินอีลาสติกได้แต่ไม่เกิดการพังทลายของโครงสร้าง และมีเสถียรภาพ
- สามารถสลายพลังงานการสั่นไหวได้อย่างมากและลดค่าแรงที่ใช้ในการออกแบบได้หลายเท่าตัว
- การพิจารณาผลตอบสนองของโครงสร้างแบบอินอีลาสติกนำไปสู่การสร้างสเปกตรัมผลตอบสนองแบบอินอีลาสติกสำหรับการออกแบบต่อไป

มาตรฐานการออกแบบต้านทานแรงจากแผ่นดินไหว

มยผ. 1301/1302-61

แรงเฉือนในแนวราบที่ระดับพื้นดิน V

$$V = \left(\frac{A}{g}\right)W = C_s W = \left(\frac{S_a I}{R}\right)W$$

ค่าประกอบความสำคัญของอาคาร

น้ำหนักของตัวอาคาร

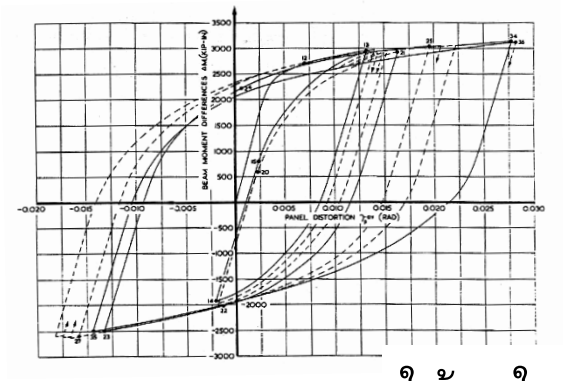
Design Spectral Acceleration ที่ขึ้นกับ คาบธรรมชาติ ระดับความรุนแรง และสภาพดิน

ค่าตัวประกอบปรับผลตอบสนอง ขึ้นกับความเหนียว และประสิทธิภาพในการตอบสนองแบบอินอีลาสติกของโครงสร้าง

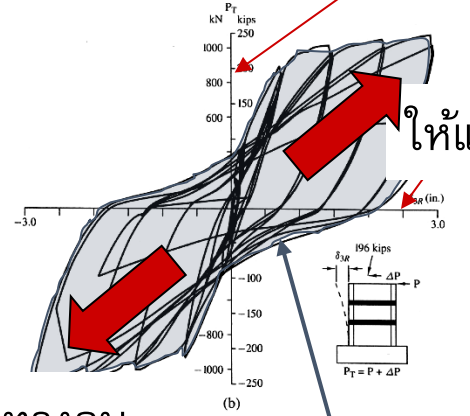
มีค่าตั้งแต่ 3 ถึง 8

ผลตอบสนองแบบอินอีลาสติก

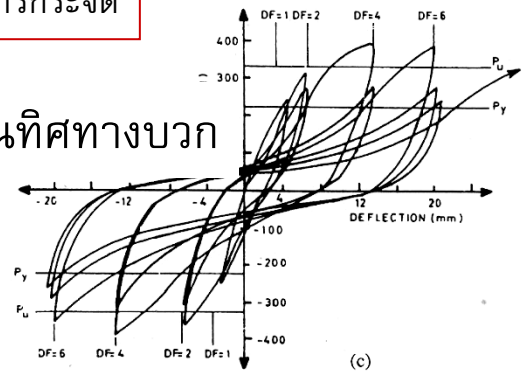
ผลการทดสอบแบบวัฏจักรของจุดต่อ



Steel



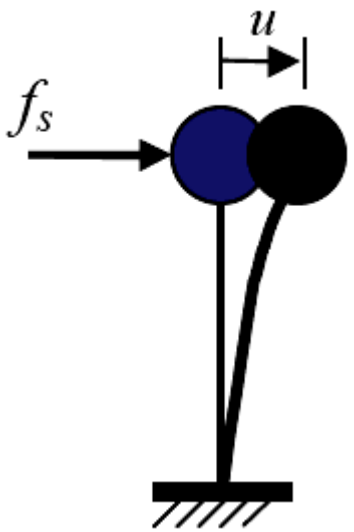
R.C.

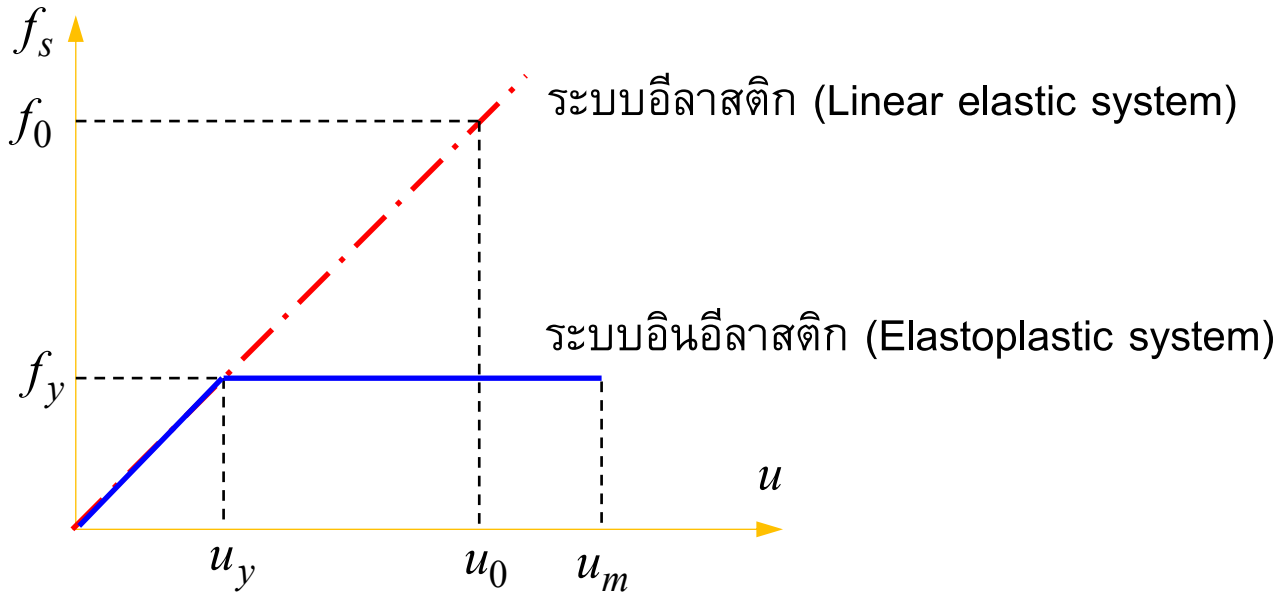


Masonry

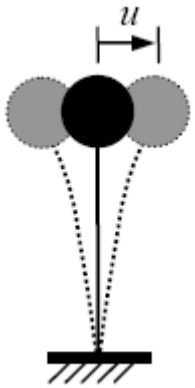
พื้นที่ใต้กราฟ (แรง x การกระจัด) = พลังงานที่เกิดขึ้นภายในระบบ

ผลตอบสนองแบบอีลาสติก VS อินอีลาสติก



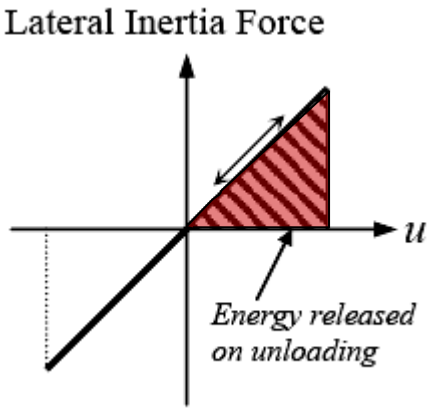


การสลายพลังงานจากการตอบสนองแบบอินอีลาสติก

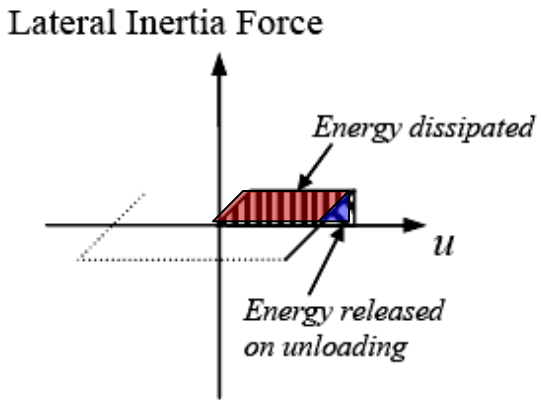


SDOF System

ระบบโยกตัวภายใต้แผ่นดินไหว



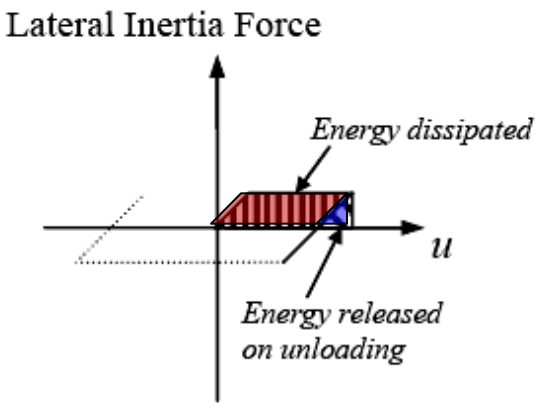
Elastic System



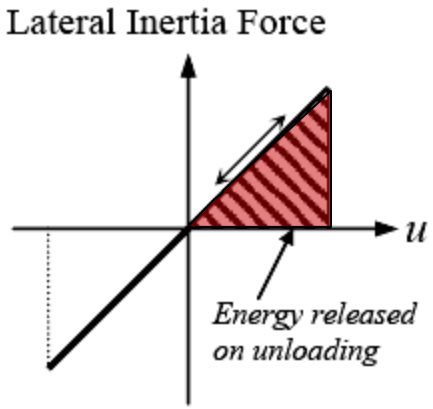
Inelastic System
(Elasto-plastic System)

พลังงานจลน์จากการโยกตัวเปลี่ยนกลับ ไป-มา
กับพลังงานความเครียดในระบบ

การสลายพลังงานจากการตอบสนองแบบอินอีลาสติก



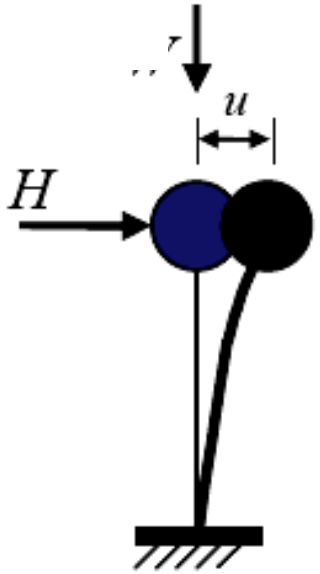
Inelastic System
(Elasto-plastic System



Elastic System

- หลังเกิดการคราก ระบบไม่สามารถรับแรงเพิ่ม
- เกิดเป็นจุดหมุนพลาสติกทำให้มีการตอบสนองในช่วงเกินจากช่วงอีลาสติกที่มีการกระจัดมากที่ระดับของแรงต่ำกว่าเมื่อเทียบกับระบบอีลาสติก
- ระบบแบบนี้เกิดการเคลื่อนที่ไป-กลับได้โดยยังไม่เกิดการวิบัติแต่การเสียรูปไม่กลับสู่จุดเริ่มต้นเมื่อหยุดแรงกระทำ
- เมื่อระบบนี้โยกตัวกลับมา พื้นที่ส่วนสามเหลี่ยมแสดงถึงพลังงานที่จะเปลี่ยนไปเป็นความเร็วของการเคลื่อนที่
- พลังงานส่วนที่เหลือที่แสดงด้วยพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะถูกระบบสลายออกไปในรูปของพลังงานอื่น

Force Controlled VS. Displacement Controlled System



ระบบภายใต้แรงทางด้านข้าง

แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง

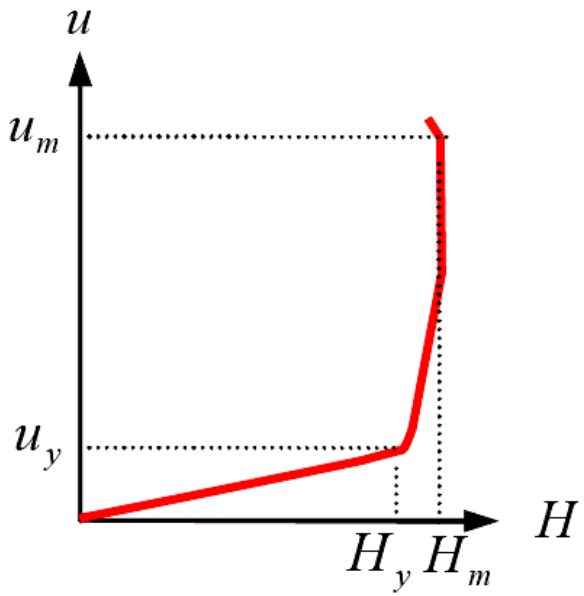
แรง H และการกระจัด u ในรูปของ

แกนตั้งเป็นตัวแปรตาม

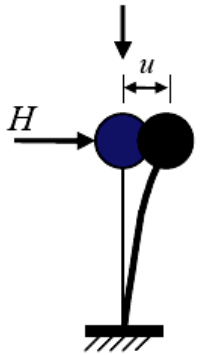


แกนนอนเป็นตัวแปรต้น

Force Controlled System

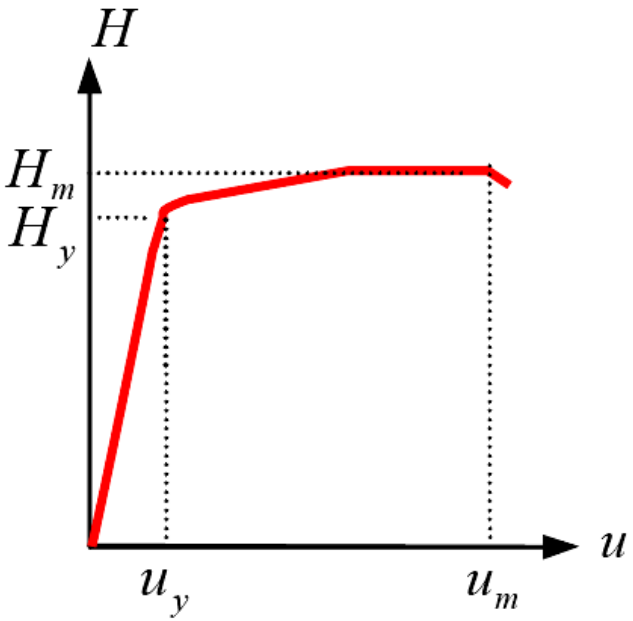


$$H_m / H_y \approx 1$$

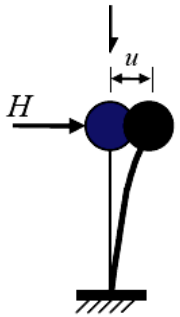


- เมื่อเพิ่มแรงในแนวราบ ค่าการกระจัดจะเพิ่มตามจนถึงจุดคราก
- หากเพิ่มค่า H ขึ้นจากจุดนี้อีกจะเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นในโครงสร้างและการกระจัดที่มีค่ามาก
- แรงที่ทำให้ระบบพังทลาย H_m มีค่าไม่ต่างกับแรงที่ทำให้เกิดการครากเริ่มต้น H_y
- คุณสมบัติความเหนียวของระบบไม่ได้ช่วยด้านการเพิ่มความสามารถในการรับแรงมากนัก

Displacement Controlled System



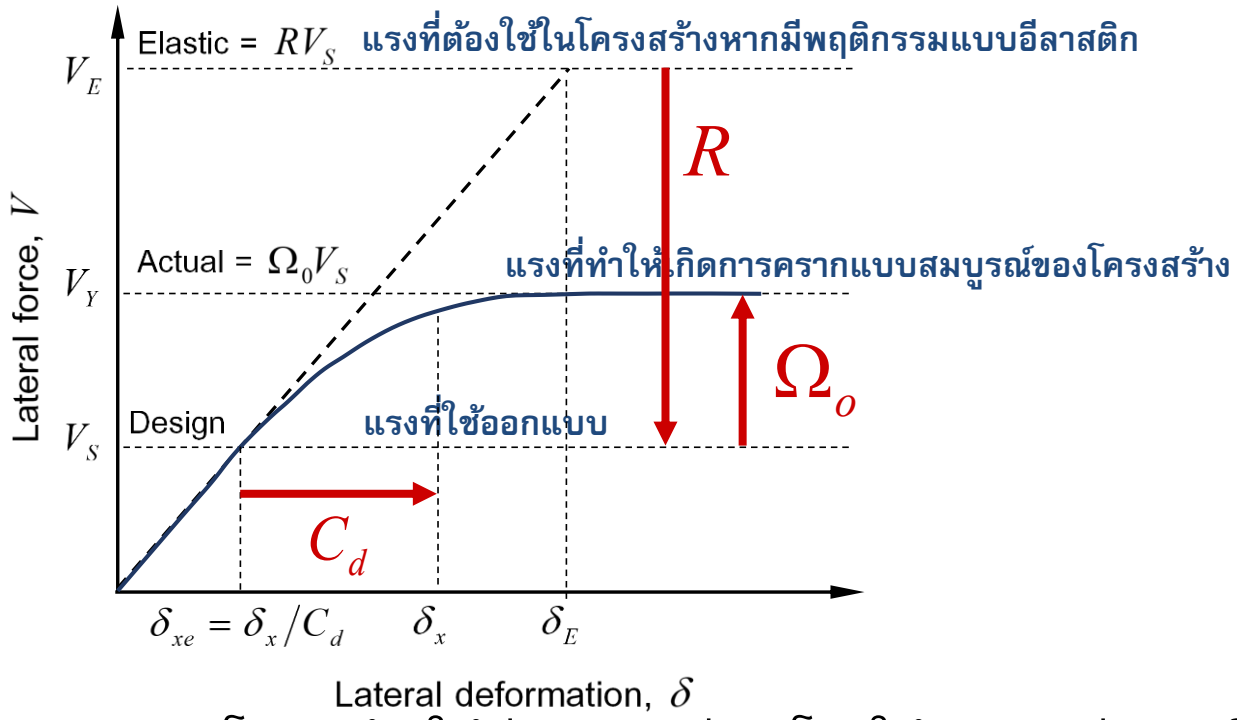
$$u_m / u_y >> 1$$



- เมื่อเพิ่มการกระจัดในแนวราบ จะทำให้เกิดการเพิ่มของแรงภายในระบบ เช่นโมเมนต์ที่ฐาน จนกระทั่งถึงจุดคราก
- หากเพิ่มค่า u ขึ้นจากจุดนี้อีก ค่าโมเมนต์ที่ฐานจะเพิ่มขึ้นอีกเพียงเล็กน้อย
- สำหรับระบบที่มีความเหนียว ค่าการกระจัดสูงสุด u_m อาจมีค่ามากกว่าการกระจัดที่จุดเริ่มคราก u_y ได้หลายเท่าตัวก่อนที่ระบบจะพังทลาย
- **โครงสร้างที่มีความเหนียว สามารถทนต่อการเคลื่อนตัวเนื่องจากแผ่นดินไหวได้ดี**

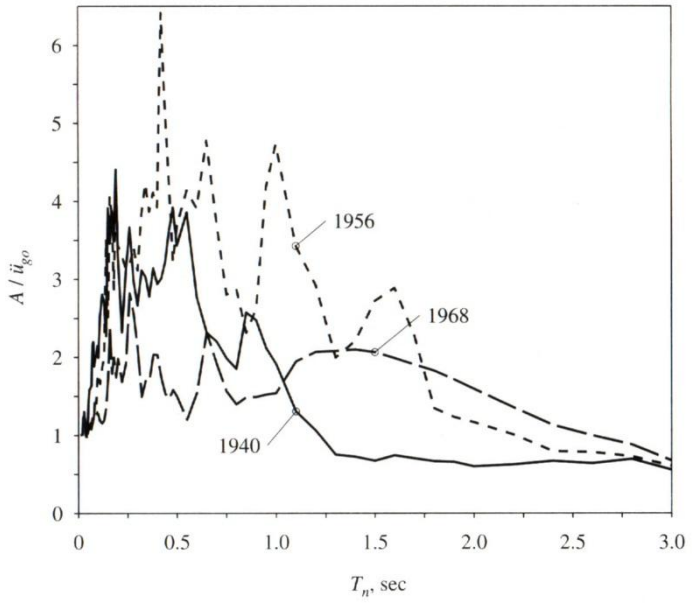
พื้นฐานการพิจารณาผลของแผ่นดินไหวต่อโครงสร้าง

- หลักการออกแบบ ยอมให้โครงสร้างมีพฤติกรรมแบบอินอีลาสติก เพื่อลดแรงที่ต้องใช้ออกแบบโครงสร้างลง (หลายเท่าตัว)



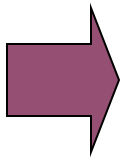
- วิศวกรต้องออกแบบโครงสร้างให้มีความเหนียว โดยให้รายละเอียดเหล็กเสริมเพียงพอ

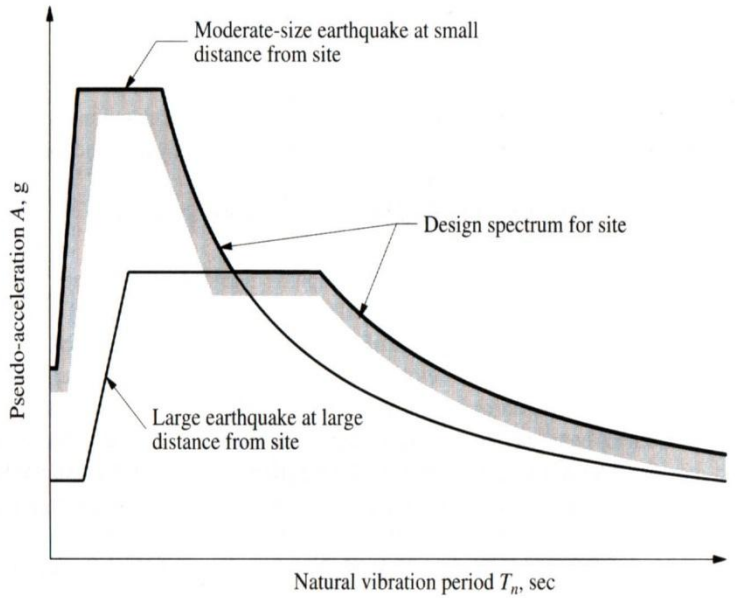
สเปกตรัมผลตอบสนองเพื่อการออกแบบ



Pseudo-acceleration response spectrum

สำหรับแผ่นดินไหวหลายเหตุการณ์

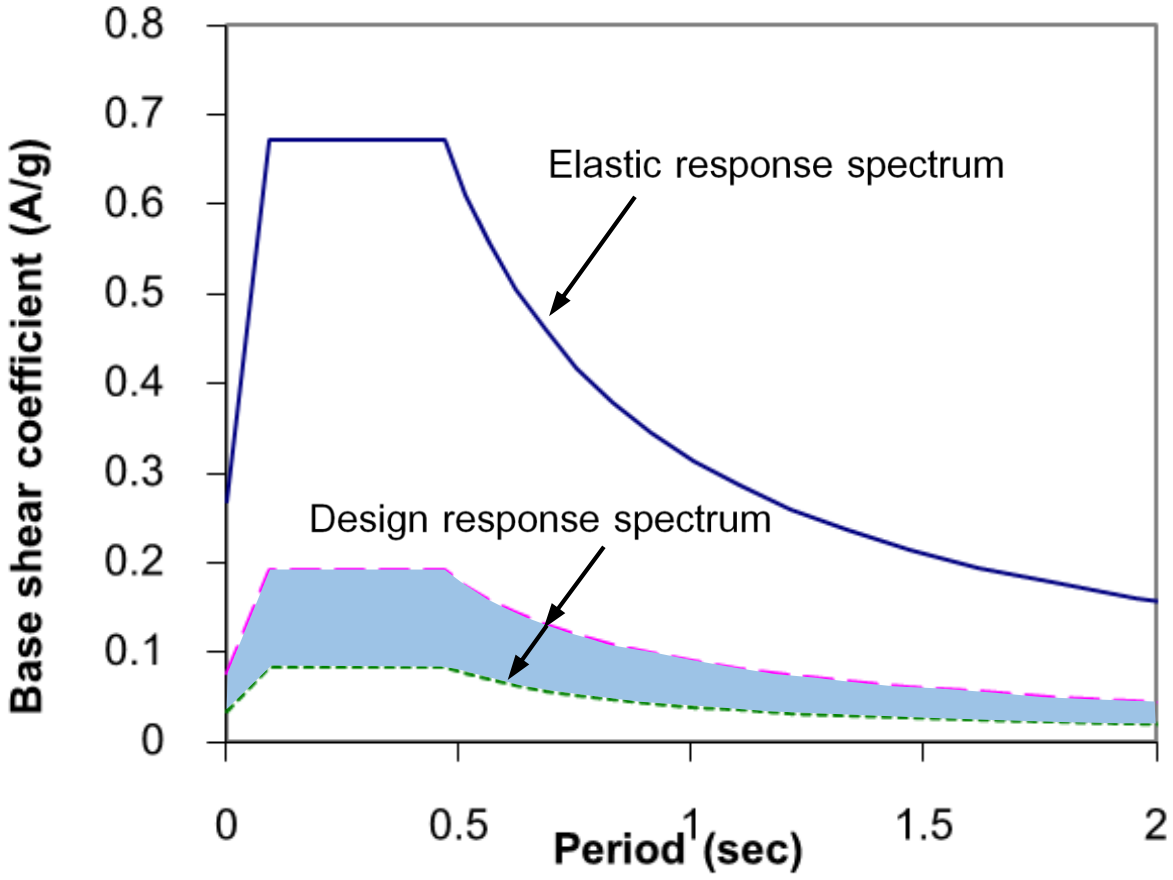




Pseudo-acceleration design spectrum

รูปจาก A. K. Chopra

สเปกตรัมผลตอบสนองเพื่อการออกแบบ



Base Shear $V_b = \frac{A}{g} W$

$\frac{A}{g} \equiv$ **Base Shear Coefficient** $W =$ **Weight**

พลศาสตร์โครงสร้างในมาตรฐานการออกแบบ



ข้อมูลของโครงการ
- ที่ตั้ง สภาพชั้นดิน
- น้ำหนักประสิทธิผลของอาคาร W
- คาบธรรมชาติของอาคาร T

ต้องการข้อมูลเชิงพลศาสตร์ของโครงสร้างหากใช้วิธีเชิงพลศาสตร์ในการออกแบบ

หาค่าความเร่งตอบสนองเชิงสเปกตรัม (Design Spectral Response Acceleration) S_a

นอกแอ่งกทม.

กำหนดค่าสเปกตรัมตามพื้นที่ S_S, S_1 (ตารางที่ 1.4-1)

กำหนดประเภทของดินที่รองรับอาคาร (A,B,C,D,E,F) (ภาคผนวก ก)

เลือกสัมประสิทธิ์ปรับแก้เนื่องจากผลของชั้นดิน F_a, F_v (ข้อ 1.4.3)

สร้างกราฟสำหรับ S_a (ข้อ 1.4.4,1.4.5)
จาก $S_{DS} = \frac{2}{3}(F_a S_s)$ และ $S_{D1} = \frac{2}{3}(F_v S_1)$

ในแอ่งกทม.

ใช้กราฟ หรือตารางสำหรับพื้นที่ในแอ่ง 10 โซน (ข้อ 1.4.5.2)

สรุปหลักการออกแบบอาคารต้านทานแรงจากแผ่นดินไหว ตาม มยผ. 1301/1302-61

ข้อมูลของความเร่งตอบสนองเชิงสเปกตรัม S_a

กำหนดความสำคัญของอาคาร (I, II, III, IV) (ข้อ 1.5)
ประเภทการออกแบบต้านทานแรงแผ่นดินไหว (ก,ข,ค,ง) (ข้อ 1.6)
และพิจารณาความไม่สม่ำเสมอ (ข้อ 2.4.2)

เลือกระบบโครงสร้าง กำหนดค่า R, Ω, C_d (ข้อ 2.3.1)
และเลือกวิธีออกแบบ (ข้อ 2.7)

วิธีแรงสถิตเทียบเท่า

คำนวณแรงเฉือนที่ฐาน (ข้อ 3.2) $V = \frac{S_a I W}{R}$

กระจายแรงเฉือนไปตำแหน่งบนอาคาร (ข้อ 3.4, 3.5)

วิธีเชิงพลศาสตร์ (บทที่ 4)

วิเคราะห์โครงสร้างภายใต้แรงจากแผ่นดินไหว

ตรวจสอบการเคลื่อนตัวสัมพัทธ์ระหว่างชั้น และการโก่งตัวของโครงสร้าง

รวมน้ำหนักบรรทุกออกแบบ (Design Load Combinations) (ข้อ 2.5)

ออกแบบขนาดหน้าตัดขององค์อาคาร

ออกแบบการให้รายละเอียดเหล็กเสริม (บทที่ 5)

วิธีการคำนวณแรงแผ่นดินไหวตาม มยผ. 1301/1302-61

- บทที่ 3 วิธีแรงสถิตเทียบเท่า (การวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้น)
- บทที่ 4 การออกแบบโครงสร้างด้วยวิธีเชิงพลศาสตร์ (Dynamic Method)
  - วิธีสเปกตรัมการตอบสนองแบบโหมด (การวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้น)
  - วิธีวิเคราะห์การตอบสนองแบบแบบประวัติเวลา
    - การวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้น
    - การวิเคราะห์โครงสร้างแบบไม่เชิงเส้น

วิธีแรงสถิตเทียบเท่า

- หาค่าความเร่งตอบสนองเชิงสเปกตรัม (Design Spectral Response Acceleration) จากที่ตั้ง (ระดับความรุนแรง) สภาพชั้นดิน และคาบธรรมชาติของอาคาร
- คำนวณแรงเฉือนที่ฐานอาคาร

$$V = \frac{S_a I W}{R}$$

- กระจายแรงเฉือนไปตามความสูงของอาคาร

$$F_x = \frac{V W_x h_x^{\,k}}{\sum_{x=1}^{N} W_x h_x^{\,k}}$$

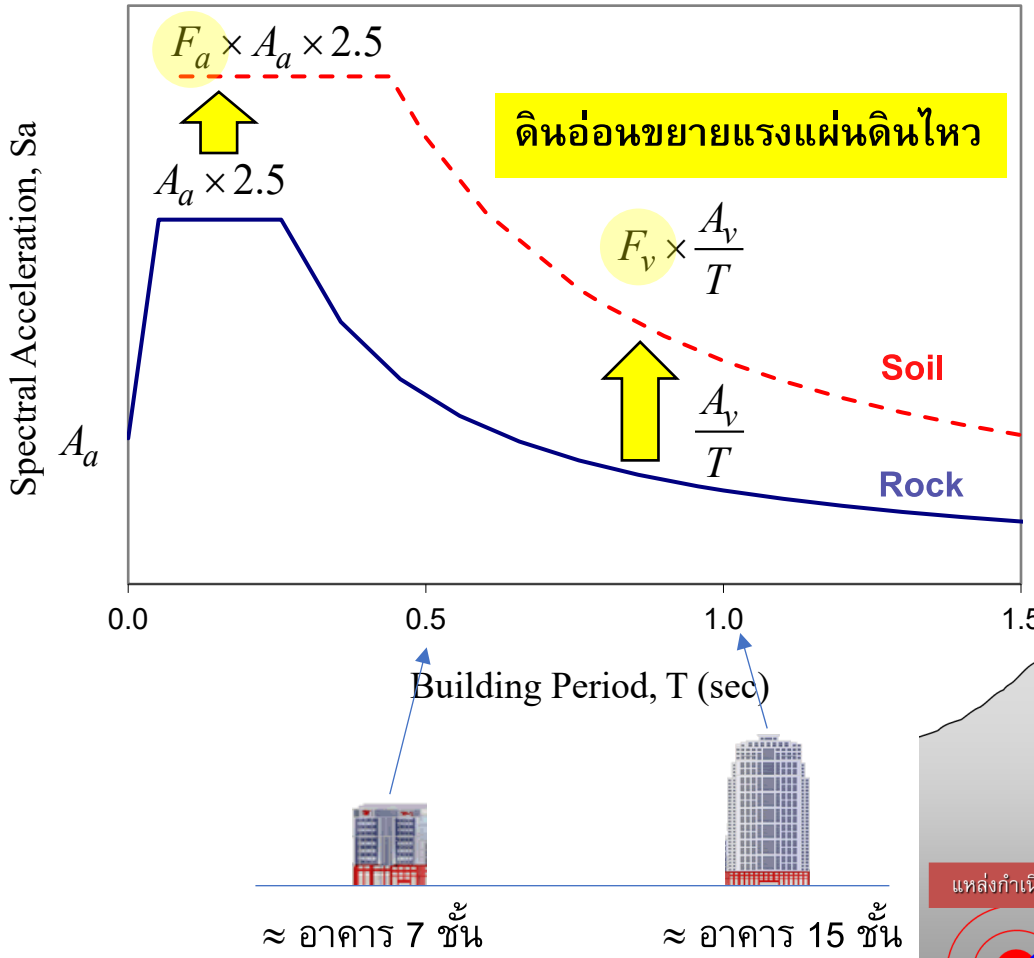
$k = 1.0$ เมื่อ $T \le 0.5$ วินาที

$k = 1 + \frac{T - 0.5}{2}$ เมื่อ 0.5 วินาที $< T < 2.5$ วินาที

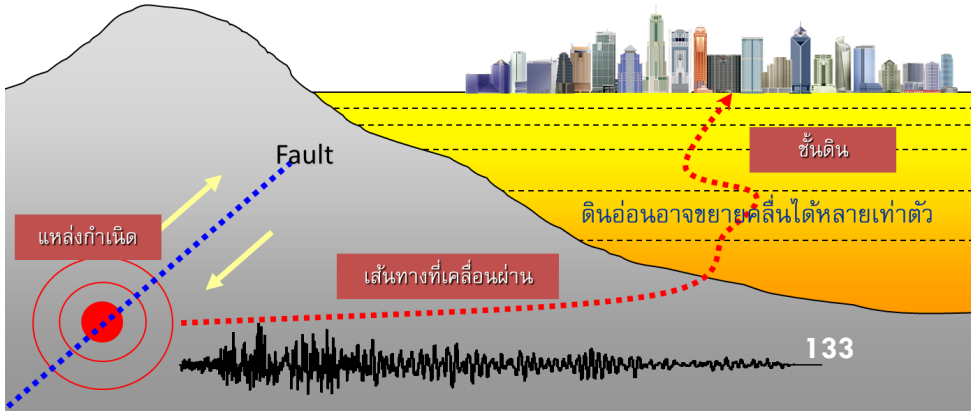
$k = 2.0$ เมื่อ $T \ge 2.5$ วินาที

- วิเคราะห์โครงสร้าง/ ตรวจสอบการเคลื่อนตัว/ ออกแบบ/ ให้รายละเอียด

ความเร่งตอบสนองเชิงสเปกตรัม s_a
(Design Spectral Response Acceleration)



- การหาความเสี่ยงของพื้นที่จาก PSHA (Probabilistic Seismic Hazard Analysis) ผลของแหล่งกำเนิด กลไกแผ่นดินไหว ระยะทางถึงที่ตั้งอาคาร
- การหากำลังการขยายคลื่นเนื่องจากชั้นดิน



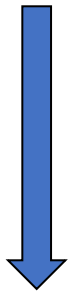
ผลของชั้นดินต่อลักษณะของคลื่นแผ่นดินไหว (Site Effects)

- ชั้นดินอ่อนสามารถขยายขนาดของแผ่นดินไหวได้หลายเท่าตัว
- จังหวะการสั่นสะเทือนเกิดขึ้นด้วยลักษณะที่มีจังหวะชัดเจน และส่งผลรุนแรงกับอาคารกลุ่มเสี่ยง

ข้อมูลสำคัญเพื่อใช้ประเมิน Site Effects (มยผ. 1301/1302)

- ความเร็วคลื่นเฉือน (Shear Wave Velocity, Vs) ของชั้นดิน
- มาตรฐานการออกแบบจัดกลุ่มชั้นดินตามค่าความเร็วคลื่นเฉือนเฉลี่ย 30 m (Vs30)

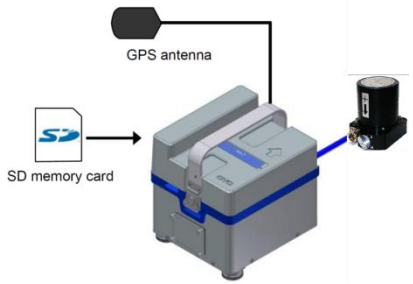
ประเภทชั้นดิน	$\bar{v}_s$ (30 m)
A (หินแข็ง)	>1500 เมตร/วินาที
B (หิน)	750 - 1500 เมตร/วินาที
C (ดินแข็ง)	360 – 750 เมตร/วินาที
D (ดินปกติ)	180 – 360 เมตร/วินาที
E (ดินอ่อน)	< 180 เมตร/วินาที

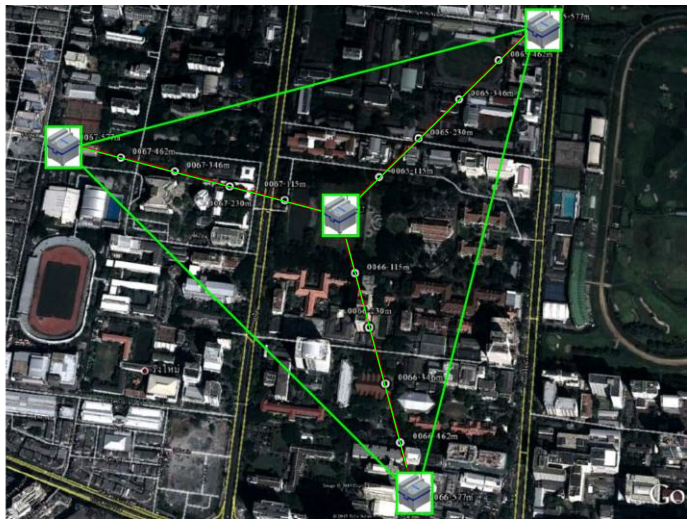


$F_a F_v$

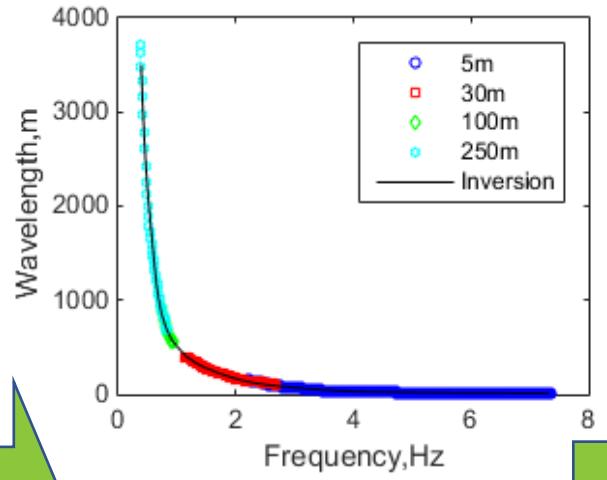
เพิ่มขึ้น

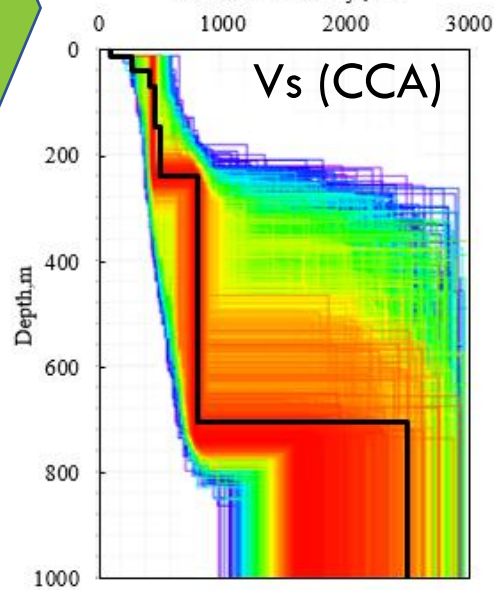
Site Characteristics and Amplification of Bangkok Basin

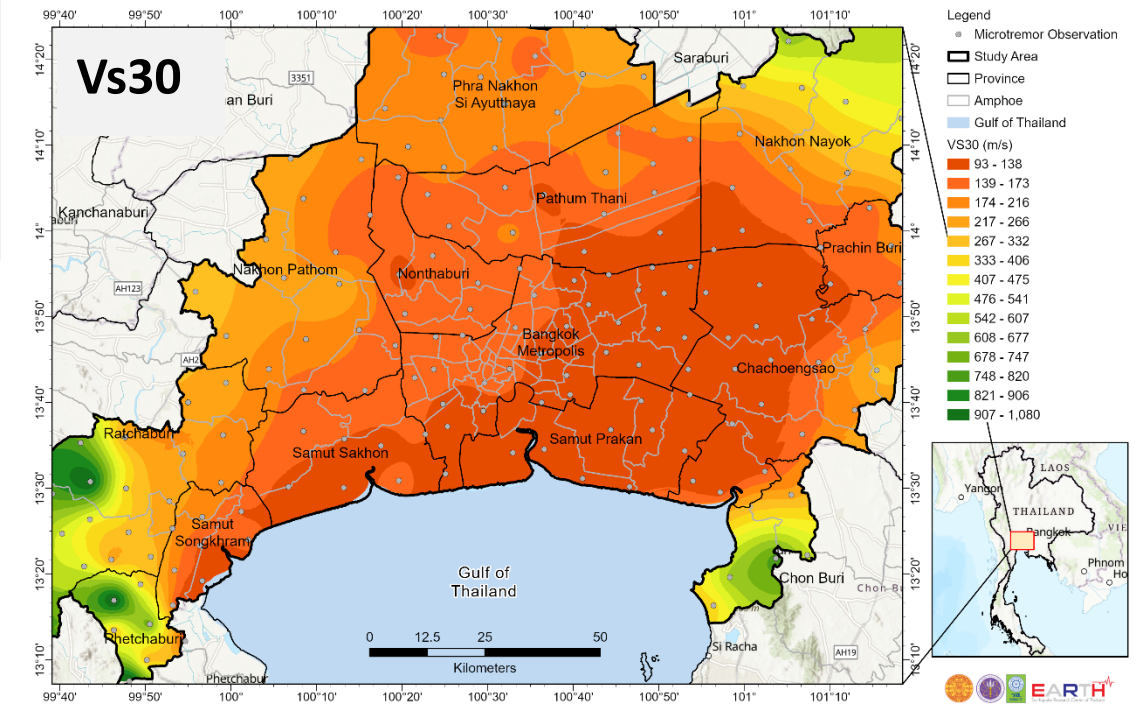


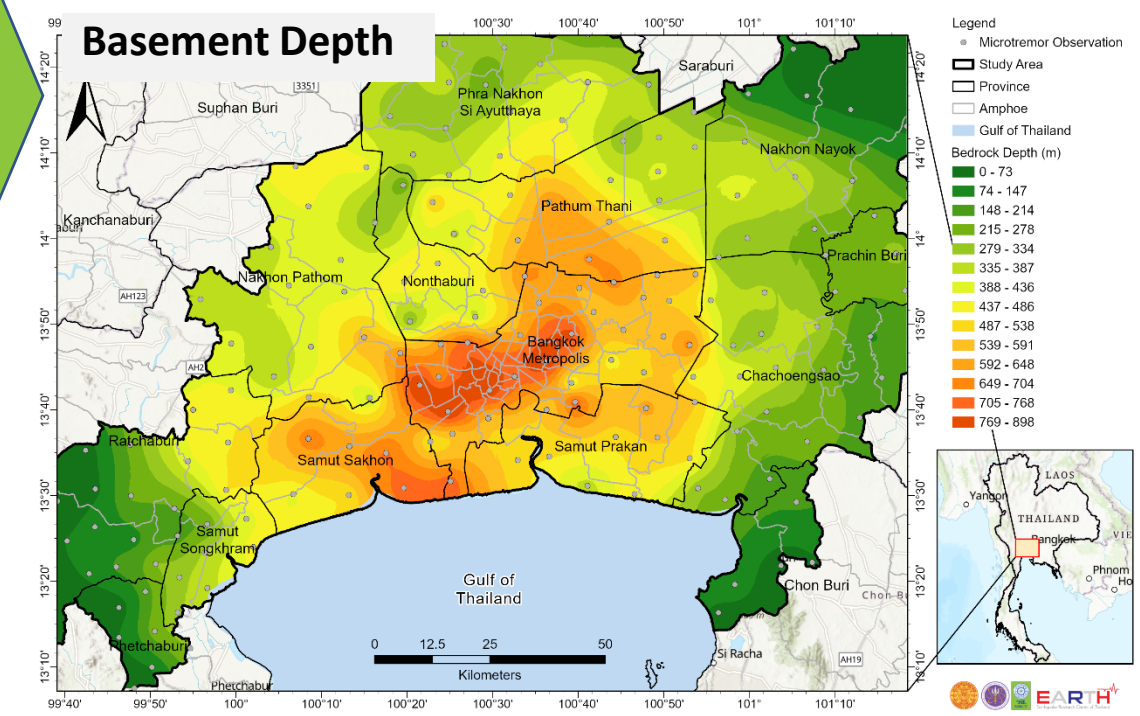


Array Microtremor Survey



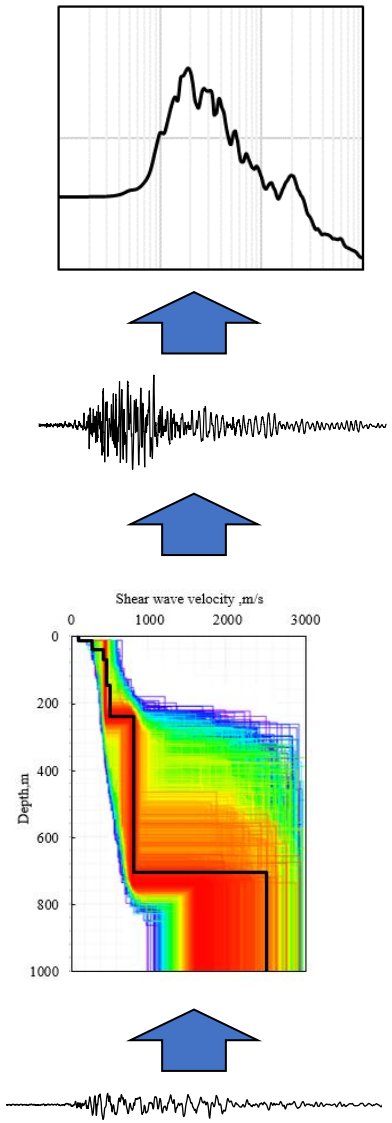


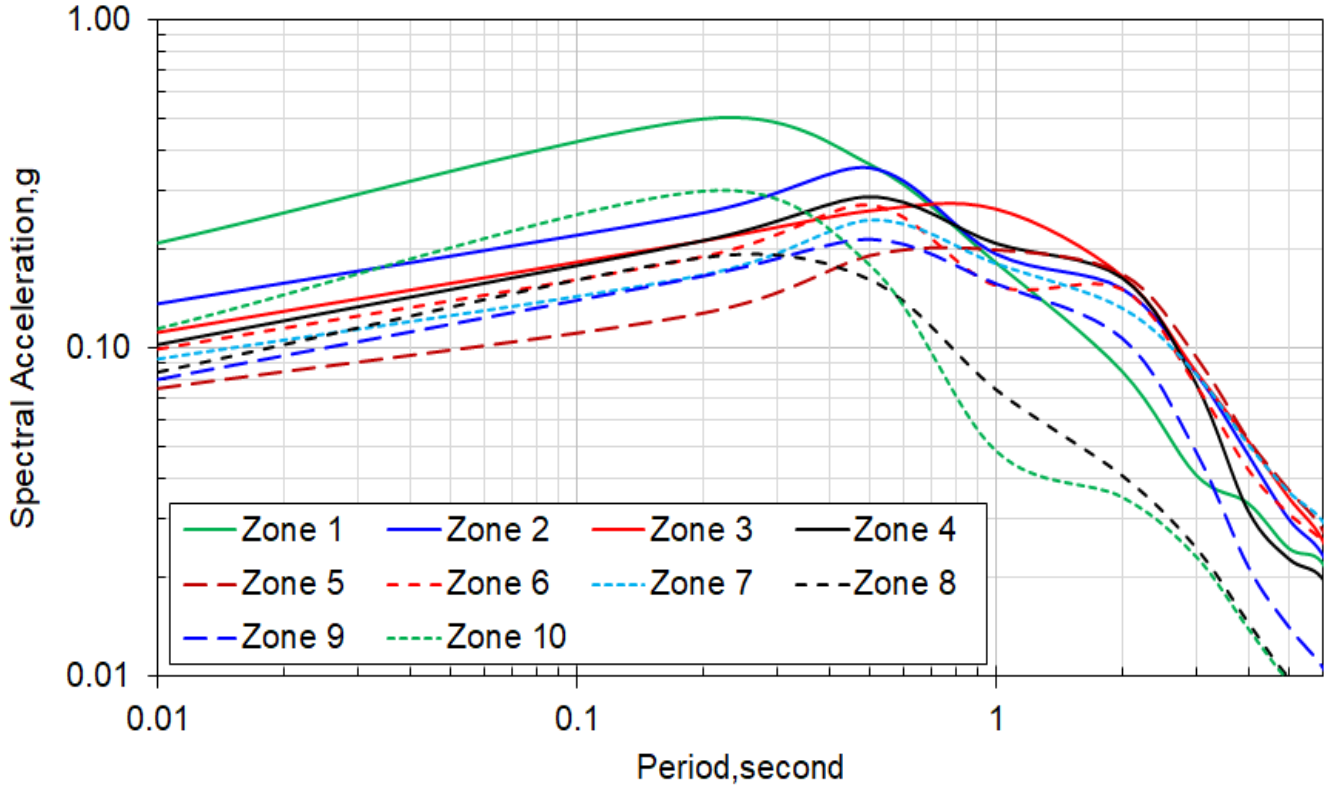


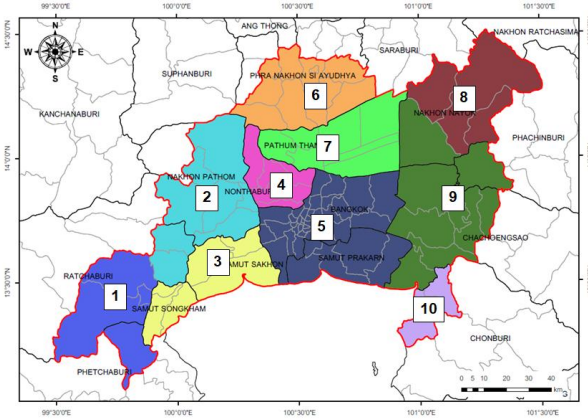


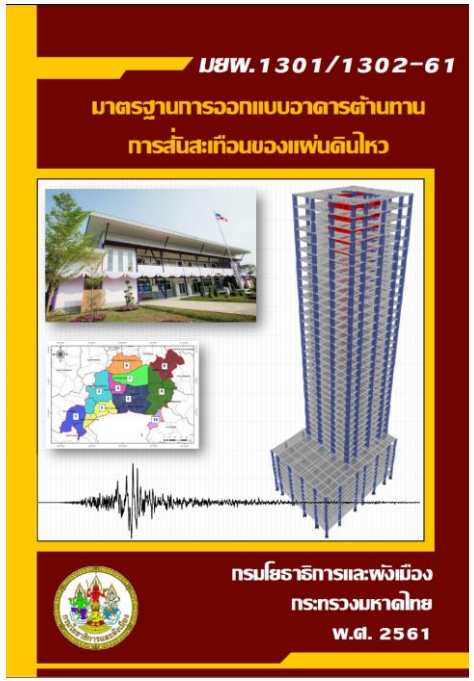
Design Spectral Response Acceleration (DPT standard 2018)

1D Site Response Analysis









EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

บทที่ 3 วิธีแรงสถิตเทียบเท่า

แรงเฉือนที่ฐานอาคาร

$$V = \frac{S_a I W}{R}$$

- S_a : สัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับ คาบธรรมชาติ ตำแหน่งของโครงสร้าง และสภาพดิน (Design Spectral Response Acceleration)
- I : ค่าสัมประสิทธิ์ผลตอบสนอง ขึ้นกับความเหนียว และประสิทธิภาพในการตอบสนองแบบอินอีลาสติกของโครงสร้าง
- W : น้ำหนักของตัวอาคาร
- R : ตัวคูณเกี่ยวกับการใช้งาน

ค่าคาบการสั่นพื้นฐาน

(ก) สูตรการประมาณ

อาคารคอนกรีตเสริมเหล็ก $T = 0.02H$

อาคารโครงสร้างเหล็ก $T = 0.03H$

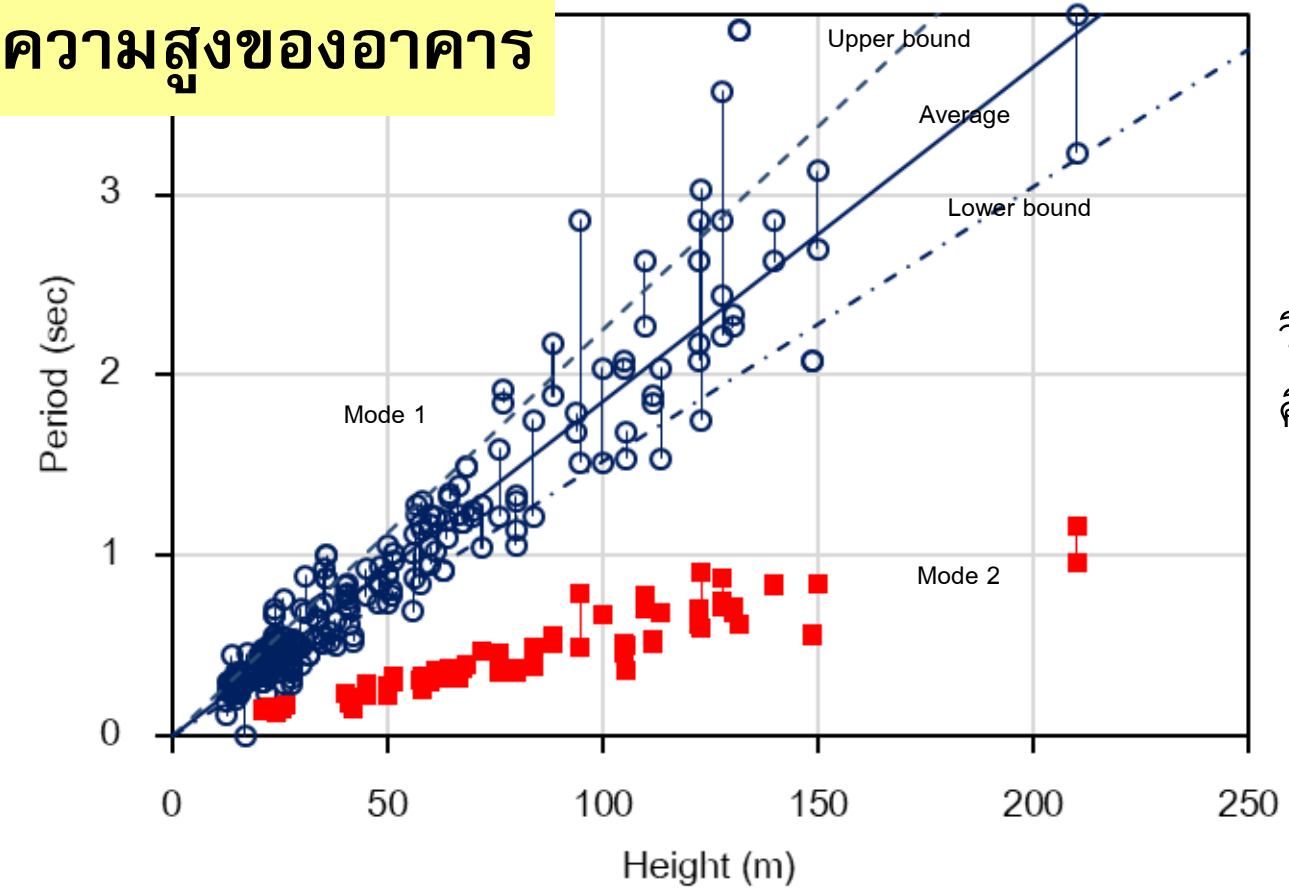
H คือความสูงของอาคารวัดจากพื้นดิน มีหน่วยเป็นเมตร

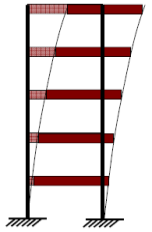
(ข) หากใช้วิธีอื่น เช่นโปรแกรม Analysis หรือ

$$T = 2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(w_i \delta_i^2 \right) \Big/ g \sum_{i=1}^{n} \left(F_i \delta_i \right)}$$

จะต้องไม่เกิน 1.5 เท่าของค่าที่คำนวณได้จาก สูตรการประมาณ จาก (ก)

คาบ & ความสูงของอาคาร





วิธีแรงสถิตเทียบเท่า

คิดเฉพาะ Mode 1

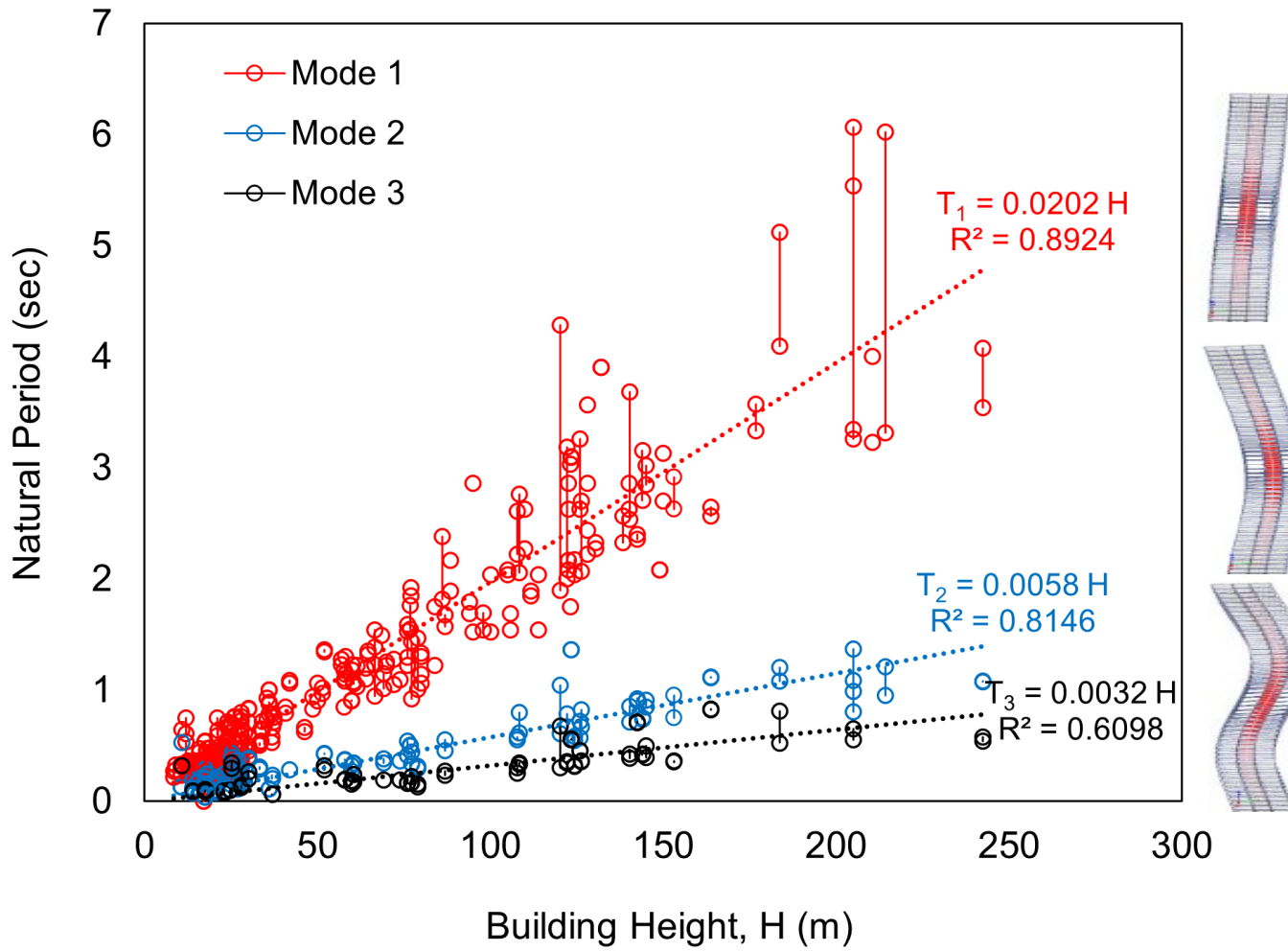
ข้อมูล	สมการค่าคาบธรรมชาติ			
	ขอบเขตล่าง (T_L)	ค่าเฉลี่ย (T_R)	ขอบเขตบน(T_U)	S_e
รวมทั้งหมด	$0.0152H$	$0.0185H$	$0.0225H$	0.197

สมการการประมาณค่าคาบธรรมชาติที่เหมาะสมสำหรับออกแบบอาคารต้านแผ่นดินไหวในประเทศไทยที่เสนอเป็น มยผ. 1302 คือ

$$T = 0.02H$$

Ambient Vibration Test for Buildings (2024)

- Natural period
- Mode shape
- Damping ratio





EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

37-story Building

Long-Term Monitoring by TU-SHM

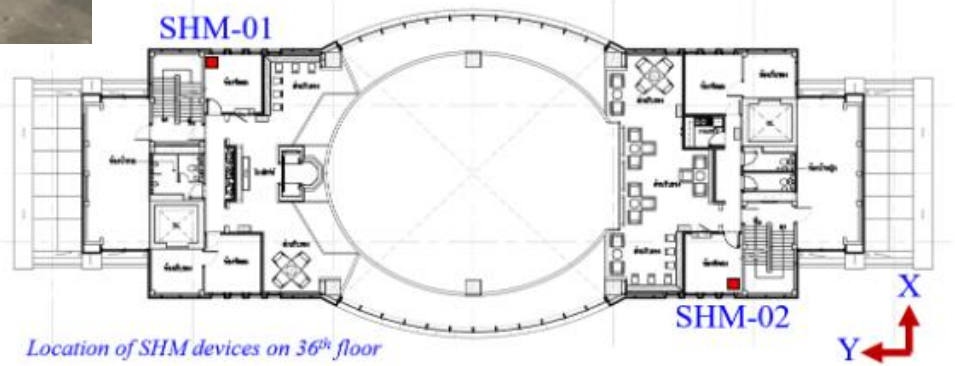
(Since 2023)







Location of SHM devices on 36th floor

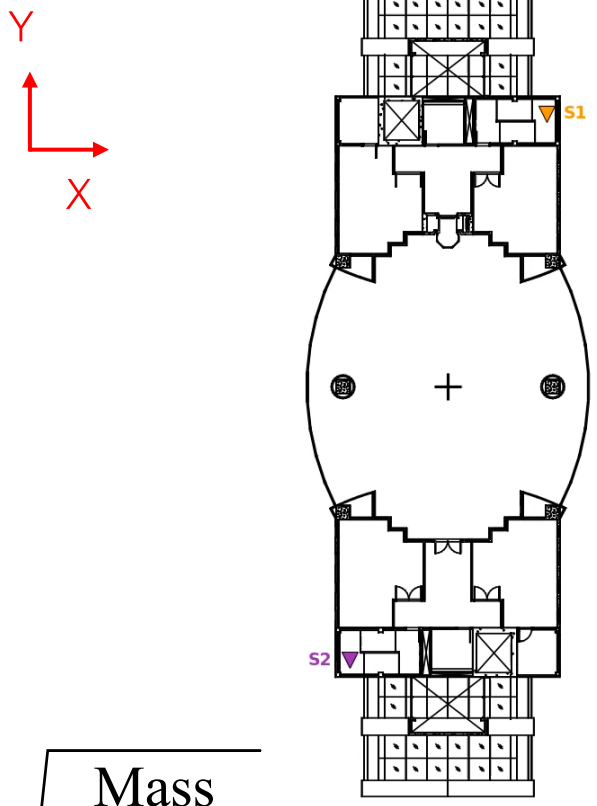


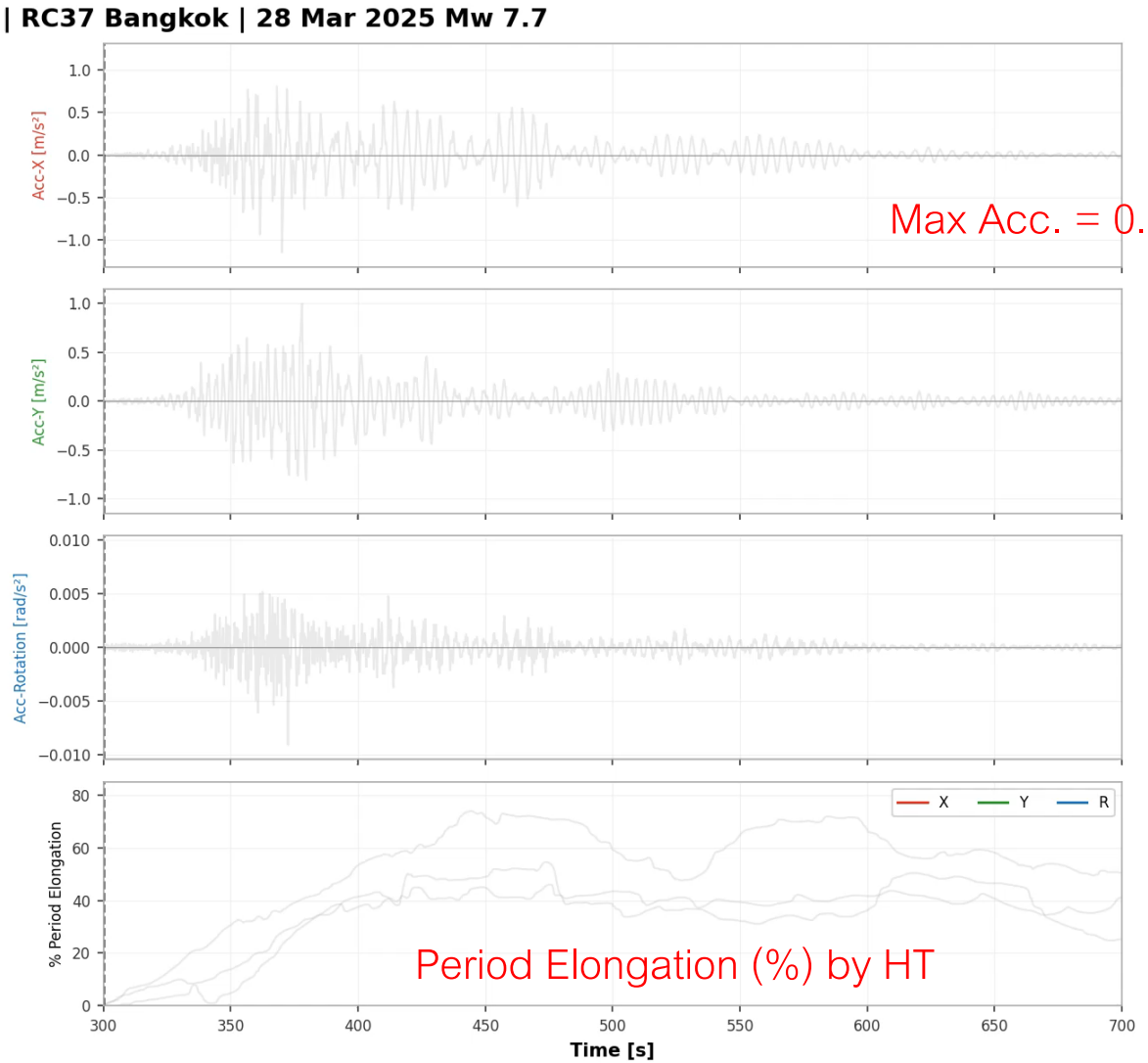
Location of SHM devices on 36th floor



EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

28 March 2025 Acceleration Time Series (36th floor)



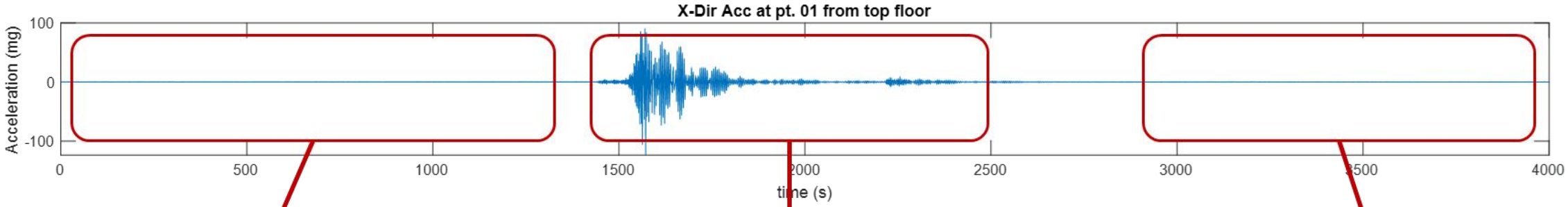


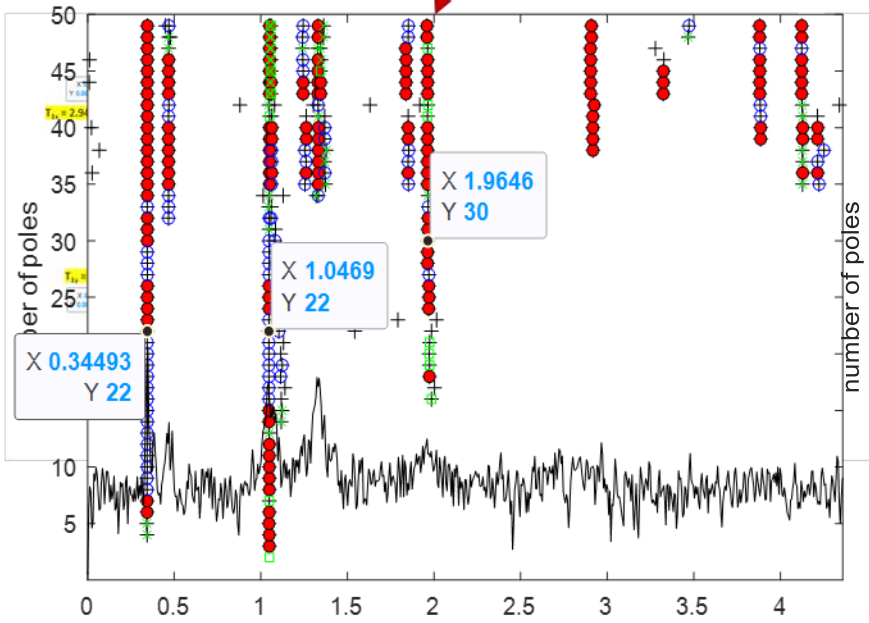
$$T \propto \sqrt{\frac{\text{Mass}}{\text{Stiffness}}}$$

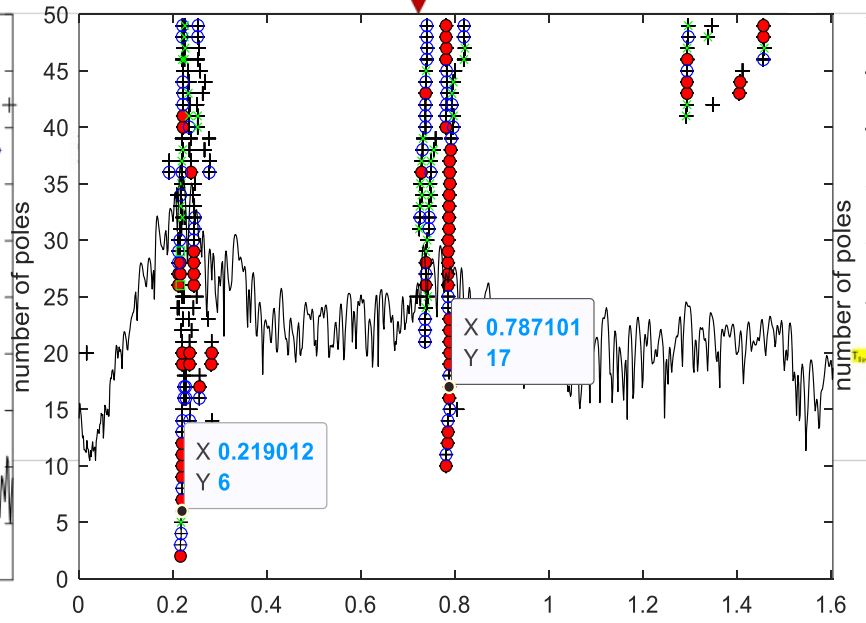
$$\text{Stiffness} \propto \frac{1}{T^2}$$

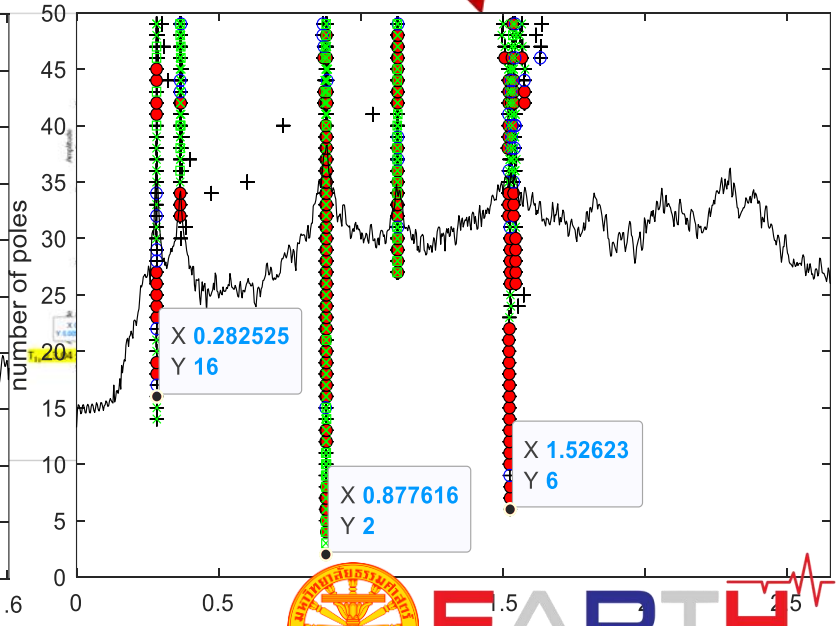
EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

Temporal Response Analysis: Pre-, During-, and Post-Event





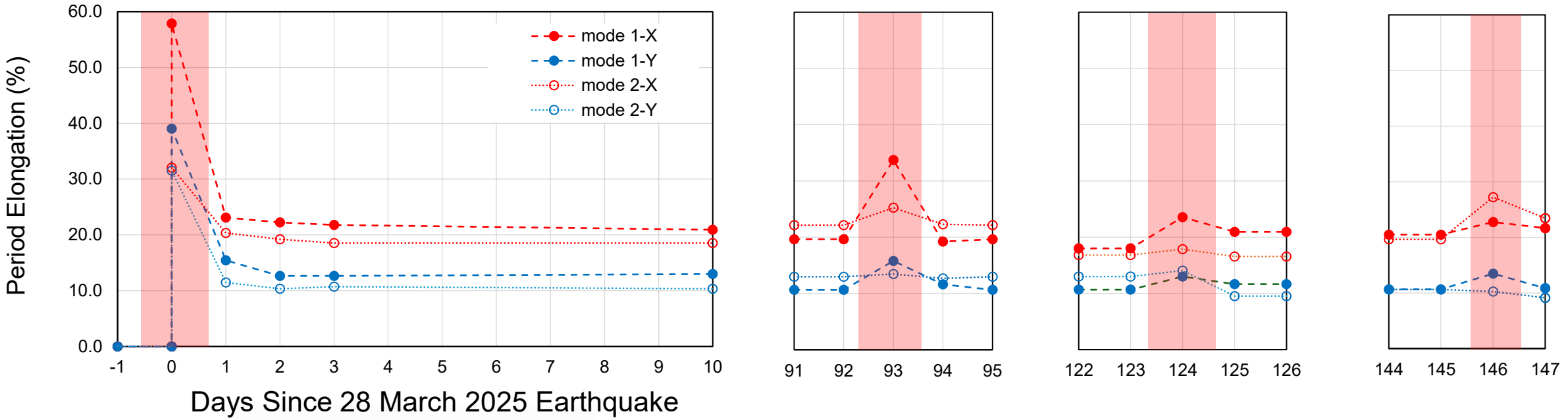




EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

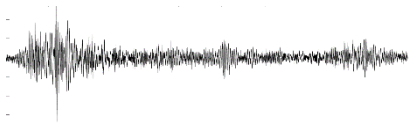
Natural Period Elongation and Recovery:

Observations from Earthquake and Wind Events





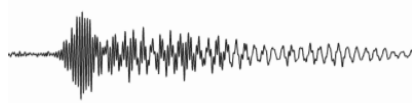
28 March (Mw 7.7,
Distance 1,040 km)
PFA = 124 milli-g



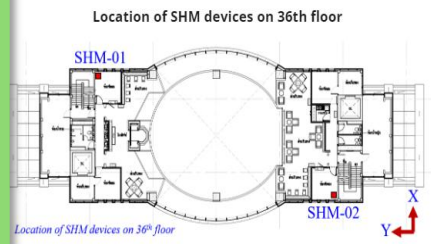
29 June (Wind)
PFA = 1.89 milli-g



30 July (Mw 8.8,
Distance 6,800 km)
PFA = 0.64 milli-g



21 Aug (M 4.6,
Distance 500 km)
PFA = 1.22 milli-g



EARTH
Earthquake Research Center of Thailand

การประมาณคาบการสั่นโดยวิธี Rayleigh

$$T = 2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(w_i \delta_i^{\,2} \right) \Big/ g \sum_{i=1}^{n} \left(F_i \delta_i \right)}$$

โดยที่ F_i คือแรงสถิตเทียบเท่าที่กระทำต่อชั้นที่ i (นิวตัน)

δ_i คือ การเคลื่อนตัวในแนวราบของอาคารที่ชั้นที่ i ไม่รวมผลของการบิด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของชั้นที่เกิดจากแรงสถิตเทียบเท่า (เมตร)

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลก (เมตร/วินาที^{2})

n คือ จำนวนชั้นของอาคาร

w_i คือ น้ำหนักโครงสร้างประสิทธิผลของชั้นที่ i (นิวตัน)

การประมาณคาบการสั่นโดยวิธี Rayleigh

พิจารณาอาคารหลายชั้นเป็นระบบ MDOF ความถี่ธรรมชาติของระบบหาได้จาก

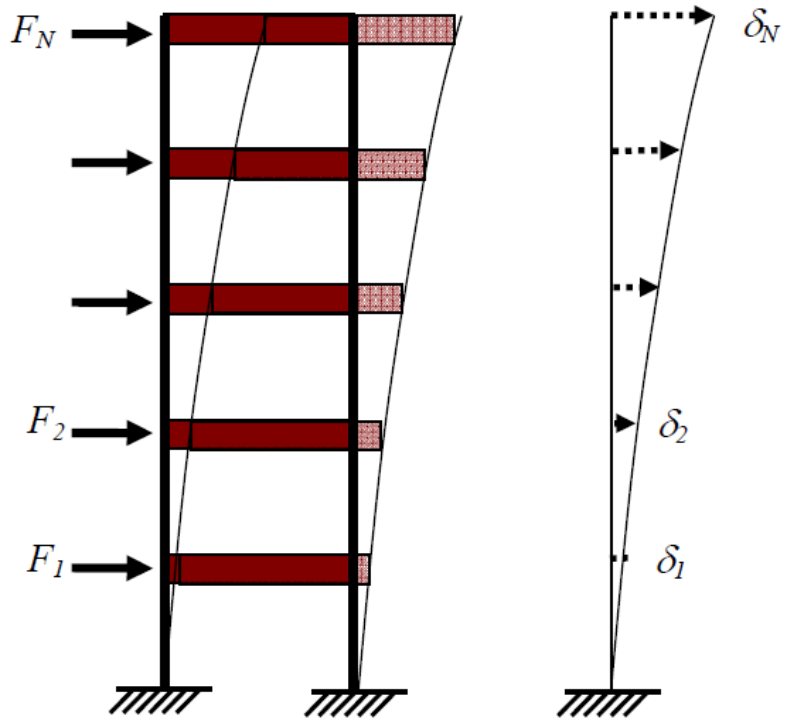
$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}$$

โดยที่ φ คือรูปร่างการสั่นไหว (Mode shape)

แต่ในการคำนวณด้วยวิธีอย่างง่ายที่ไม่มีข้อมูลของ φ

สามารถใช้การประมาณโดยแทน φ ด้วยรูปร่างการเสียรูปของอาคาร δ ภายใต้แรงเทียบเท่าทางด้านข้าง F ได้

ซึ่งเป็นหลักการของ Rayleigh's Quotient



การประมาณคาบการสั่นโดยวิธี Rayleigh

แทนค่า $\boldsymbol{\delta}$ สำหรับ $\boldsymbol{\varphi}$ และ $\mathbf{F}=\mathbf{K}\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{F} = \omega^2\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\delta} = \frac{\omega^2}{g}\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{w}\boldsymbol{\delta}$$

ได้ว่า $$\omega = \sqrt{g\frac{\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{F}}{\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{w}\boldsymbol{\delta}}}$$

จาก $T = \frac{2\pi}{\omega}$ และพิจารณาเป็นระบบหลายชั้น ค่าคาบการสั่นโดยประมาณคือ

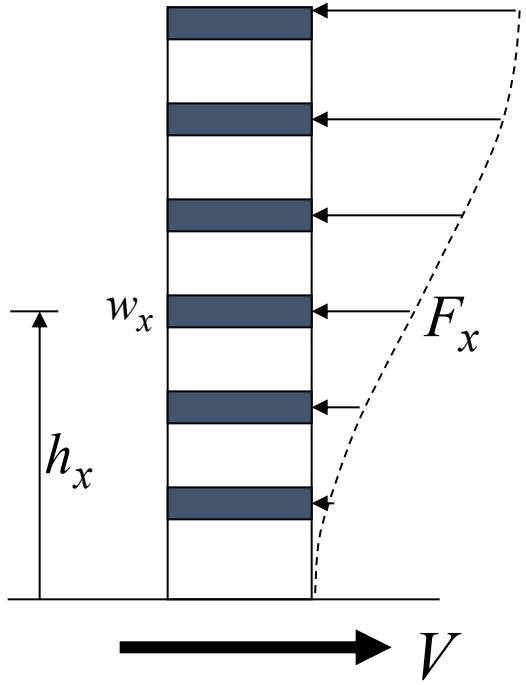
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(w_i\delta_i^{\,2}\right)}{g\sum_{i=1}^{n}\left(F_i\delta_i\right)}}$$

การกระจายแรงเฉือนในแนวดิ่ง

แรงเฉือนที่ฐาน V กระจายตลอดความสูงของอาคาร

มยผ. 1301/1302-61

$$F_x = \frac{VW_x h_x^{\,k}}{\sum_{x=1}^{N} W_x h_x^{\,k}}$$



$k = 1.0$ เมื่อ $T \le 0.5$ วินาที

$k = 1 + \frac{T - 0.5}{2}$ เมื่อ 0.5 วินาที $< T <$ 2.5 วินาที

$k = 2.0$ เมื่อ $T \ge 2.5$ วินาที

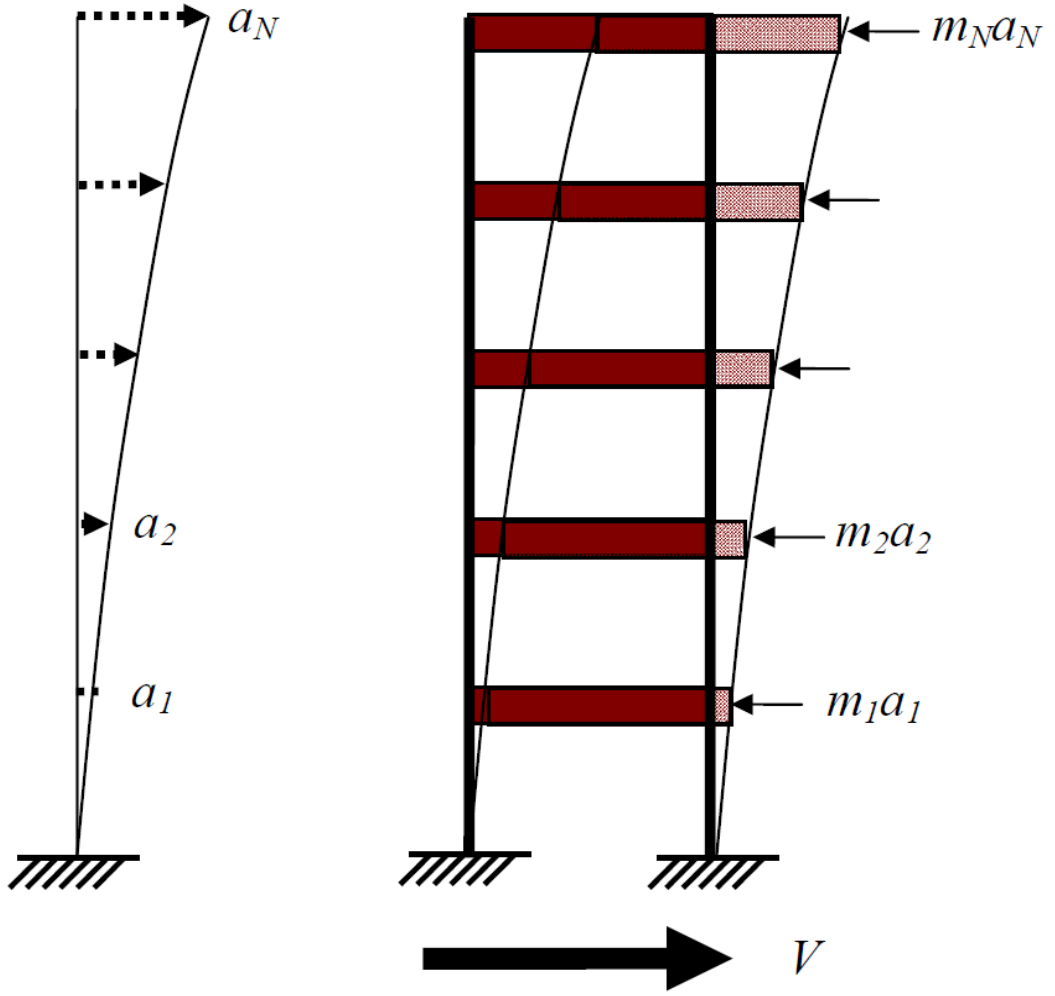
การกระจายแรงเฉือนที่ฐานไปที่ชั้นต่าง ๆ

แรงสถิตเทียบเท่าที่ชั้น x ใด ๆ F_x

ให้ ความเร่ง a_x ที่ระดับความสูง h_x สามารถเขียนเป็นสัดส่วนกับความเร่ง a_N ที่ชั้นบนสุด h_N ได้ดังนี้

$$a_x = \left(\frac{h_x}{h_N}\right)^k a_N \qquad (1)$$

โดยที่ k คือค่าคงที่



การกระจายแรงเฉือนที่ฐานไปที่ชั้นต่าง ๆ

แรงที่เกิดขึ้นที่ชั้นที่ x สามารถเขียนได้ดังนี้

$$F_x = m_x a_x$$

$$= \left(\frac{w_x}{g}\right)\left(\frac{h_x}{h_N}\right)^k a_N \qquad (2)$$

แรงเฉือนที่ฐาน V สามารถได้จากสมดุลของแรง

$$V = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

$$= \left(\frac{a_N}{g h_N{}^k}\right) \sum_{i=1}^{N} w_i h_i{}^k$$

การกระจายแรงเฉือนที่ฐานไปที่ชั้นต่าง ๆ

หรือ

$$\frac{a_N}{g h_N^{\,k}} = \frac{V}{\sum_{i=1}^{N} w_i h_i^{\,k}}$$

จากสมการที่ (2)

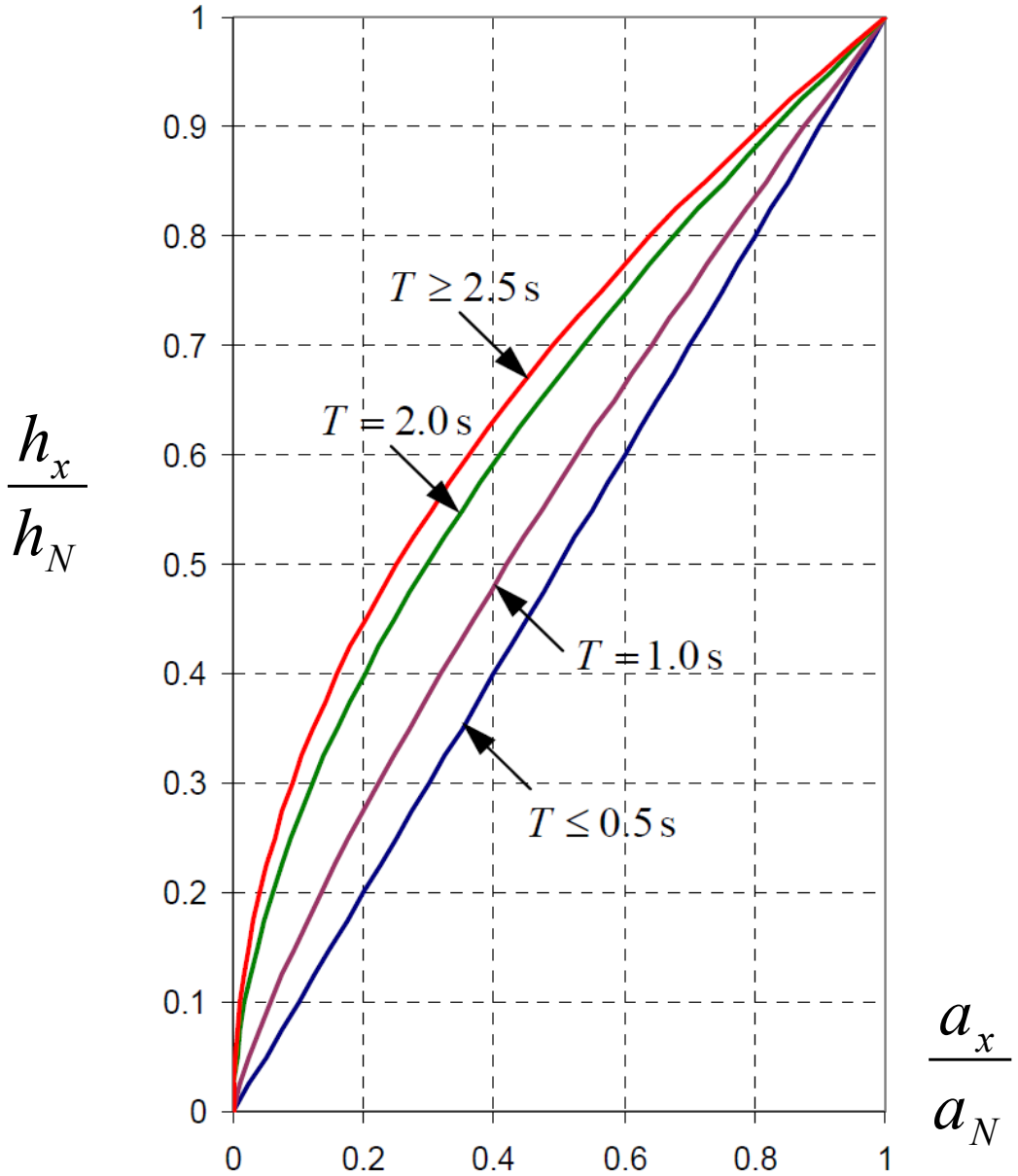
$$F_x = \frac{V w_x h_x^{\,k}}{\sum_{i=1}^{N} w_i h_i^{\,k}}$$

ตาม มยผ. k ใช้แสดงถึงแนวการดัดตัวของอาคาร

เรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์ที่กำหนดรูปแบบการกระจายแรง

$k = 1.0$	เมื่อ	$T \le 0.5$ วินาที
$k = 1 + \frac{T - 0.5}{2}$	เมื่อ	0.5 วินาที $< T < 2.5$ วินาที
$k = 2.0$	เมื่อ	$T \ge 2.5$ วินาที

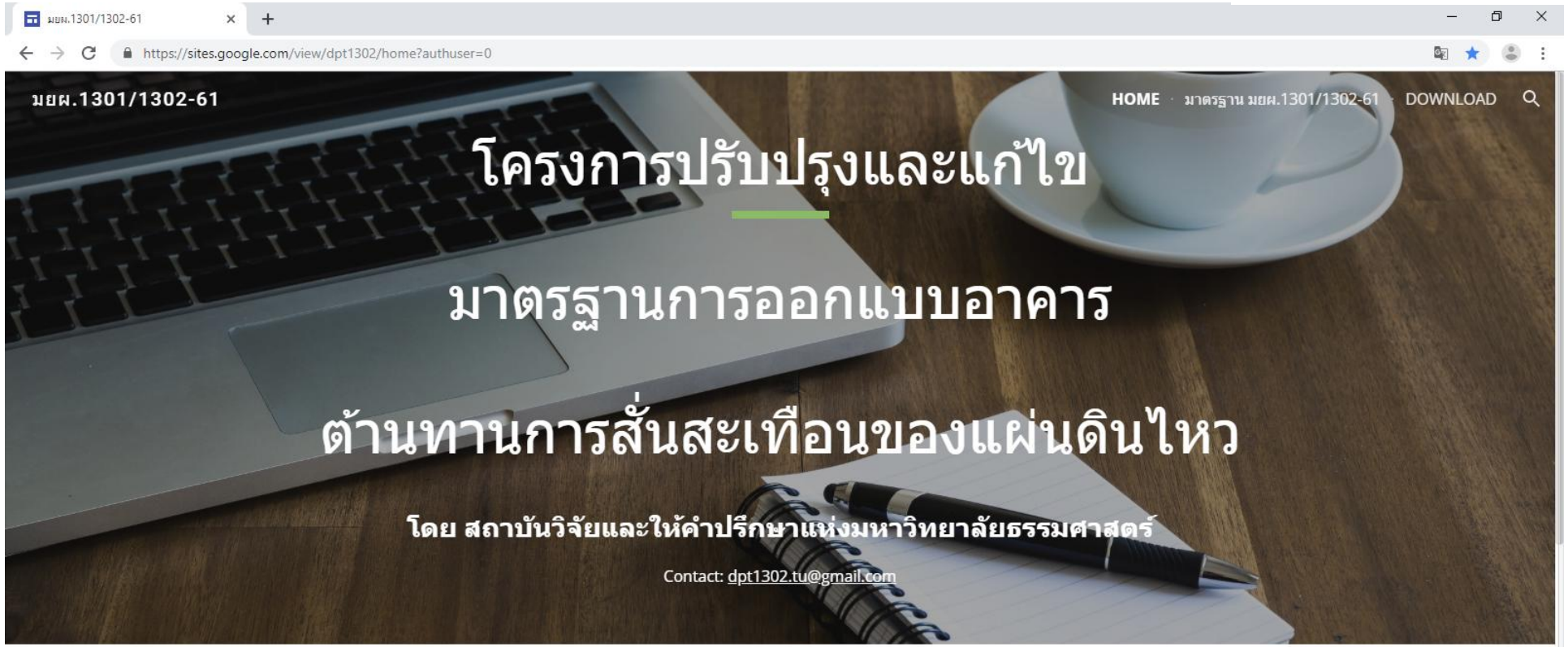
การกระจายแรงเฉือนที่ฐานไปที่ชั้นต่าง ๆ



สรุป

1. ระบบพลศาสตร์ประกอบด้วย m, c, k (หรือ T, ξ) ภายใต้แรงภายนอก $p(t)$
2. การเคลื่อนที่ของพื้นแบบมีความเร่งทำให้เกิดแรงพลศาสตร์ประสิทธิผลกระทำต่อโครงสร้าง
3. คลื่นแผ่นดินไหวมีลักษณะที่แตกต่างกันตามสภาพชั้นดิน และระยะจากแหล่งกำเนิด
4. พฤติกรรมการสั่นไหวของโครงสร้างขึ้นกับ คาบธรรมชาติ และอัตราส่วนความหน่วง เป็นหลัก
5. การสั่นไหวของระบบ MDOF สามารถอธิบายด้วยพื้นฐานทฤษฎีของระบบ SDOF
6. แรงที่เกิดขึ้นกับโครงสร้างเนื่องจากแผ่นดินไหวสามารถพิจารณาเป็นแรงสถิตเทียบเท่าได้
7. การตอบสนองของโครงสร้างต่อแผ่นดินไหวแสดงได้ในรูปของ Response spectrum
8. แรงที่ใช้ออกแบบต้านทานแผ่นดินไหวเป็นช่วงที่โครงสร้างมีพฤติกรรมอินอีลาสติก และโครงสร้างต้องมีความเหนียว และรูปทรงที่เหมาะสม
9. หลักพลศาสตร์โครงสร้างเป็นส่วนสำคัญในการพิจารณาผลจากแผ่นดินไหวต่อโครงสร้าง

https://sites.google.com/view/dpt1302/



ความเป็นมา

สืบเนื่องจากที่กรมโยธาธิการและผังเมืองได้ประกาศมาตรฐานการออกแบบอาคารต้านทานการสั่นสะเทือนของแผ่นดินไหว (มยผ. 1302-52) เมื่อปี พ.ศ. 2552 เพื่อให้ผู้ที่เกี่ยวข้องสามารถนำไปใช้ปฏิบัติให้การก่อสร้างอาคารในพื้นที่เสี่ยงภัยแผ่นดินไหวมีความปลอดภัย และหลังจากได้มีการประกาศมาตรฐานดังกล่าวแล้ว ปรากฏว่า มีเหตุแผ่นดินไหวที่ส่งผลกระทบต่อความปลอดภัยของประชาชนในพื้นที่ต่าง ๆ หลายครั้ง เช่น เหตุแผ่นดินไหวในสหภาพเมียนมาร์ เมื่อวันที่ 24 มีนาคม 2554 แผ่นดินไหวที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ อำเภอถลาง จังหวัดภูเก็ต เมื่อวันที่ 16 เมษายน 2555 และแผ่นดินไหวที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ อำเภอแม่ลาว จังหวัดเชียงรายเมื่อวันที่ 5 พฤษภาคม 2557 ที่ทำให้เกิดความเสียหายต่อชีวิตและทรัพย์สินเป็นอย่างมาก ประกอบกับมีข้อมูลแผ่นดินไหวและผลการศึกษาเพิ่มเติม ได้แก่ ผลการตรวจวัดจากสถานีตรวจวัดแผ่นดินไหวทั้งในประเทศและประเทศเพื่อนบ้าน และผล